

Modélisation des systèmes complexes

Olivier MAURICE(IRSEEM, ESIGELEC) - Philippe DURAND (M2N,
CNAM

19 décembre 2015

- 1 Grands principes de la méthode xTAN
- 2 Application au cas de la gestion d'une crise en CEM
- 3 Description du jeu
- 4 Arbre d'évolution
- 5 Analyse et horizon de Nash
- 6 Conclusion

Grands principes de la méthode xTAN

La méthode de Kron a été présentée aujourd'hui avec de nombreux exemples dans le cadre de la compatibilité électromagnétique. Suite à une série de travaux (O.Maurice, P.Durand) et la "seconde géométrisation", la méthode de Kron est aujourd'hui étendue comme un outil d'assemblage de variétés.

Ces variétés peuvent évoluer, traduisant les évolutions du système qu'elles modélisent. Ces évolutions sont pondérées de probabilités d'occurrences, déterminées dans le cadre de la théorie des jeux. Ainsi l'évolution du système est-elle modélisée par un jeu où les observables sont des grandeurs mesurables attachées au système ou à ses actions.

Grands principes de la méthode xTAN

éléments d'une topologie cellulaire \mathcal{T}^n :

- $\mathcal{T}^0 \rightarrow$ nœuds ;
- $\mathcal{T}^1 \rightarrow$ branches ;
- $\mathcal{T}^2 \rightarrow$ surfaces $\rightarrow \mathcal{C}^1$ mailles

Les constructions effectuées sur le graphe se reportent en constructions sur les variétés. Une variété est un ensemble d'équations associé à un ensemble d'inégalités (définition de Poincaré). On modifie cette définition par la suivante : Soit \mathcal{M} une variété, $\exists \psi$ une surface paramétrée de variables x_n à valeurs dans \mathbb{R} , et $e \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\psi(x_n) - e = 0 \quad (1)$$

Les valeurs des variables sont bornées dans des intervalles fermés :

$$\forall x_n \exists I \text{ s.t. } I = [I_m, I_x], x_n \in I.$$

Grands principes de la méthode xTAN

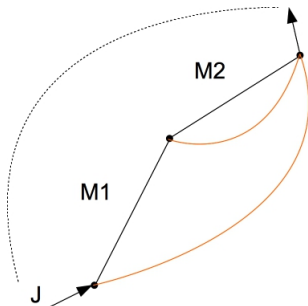
L'ensemble

$$\begin{cases} \psi(x_n) - e = 0 \\ I \end{cases} \quad (2)$$

Constitue une variété de dimension fixée par le nombre de variables considéré dans sa définition. On se dote alors d'une collection de variétés \mathcal{M}_k , chaque variété étant associée à une branche $b_k \in \mathcal{T}^1 \rightarrow \mathcal{M}_k \in \mathbb{M}$. Par ailleurs on considère un graphe G qui représente le fonctionnement du système symbolisé par l'ingénieur. La connexion de branches en série constitue un arbre couvrant : l'ossature d'un réseau du graphe. Des branches viennent refermer la structure ouverte de l'arbre couvrant en mailles. A ces opérations correspondent d'autres opérations effectuées sur les variétés associées aux branches du graphe.

Grands principes de la méthode xTAN

Figure: Graphe avec 1 réseau



Sur la figure ci-dessus on voit deux branches qui constituent avec les variétés \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 l'arbre couvrant du réseau en même temps que les équations que nous pouvons nommer structurelle du système.

Grands principes de la méthode xTAN

Si l'on associe à chaque branche k et sa variété une variable q_k , on pourra traduire l'apport d'énergie extérieur J par une connexion unitaire $x_k = J$. Une autre connexion assure la conservation des flux en créant des mailles entre les branches de l'arbre couvrant et les branches de fermetures. Par l'intermédiaire d'une connexion \mathcal{L} on écrit :

$$x_k = \mathcal{L}_k^m y_m + J_k \quad (3)$$

ce qui se traduit par

$$\mathcal{L}_k^m y_m + J_k \Leftrightarrow \bigoplus_k (z, E, x, J)_k [\mathcal{M}_k], \bigcap_k I_k \quad (4)$$

Grands principes de la méthode xTAN

Les couplages - branches ou mailles partagées se traduisent par l'enrichissement des variétés avec des variables supplémentaires issues des variétés couplées :

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \Rightarrow \begin{cases} \psi_k(x_k, \dots, y_m) \\ \psi_n(y_n, \dots, x_q) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{z}_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta} \quad (5)$$

La variété associée au système établie, on la regarde comme une hypersurface paramétrée ψ dont on peut chercher la base :

$$\mathbf{b}_u = \frac{\partial \psi}{\partial x^u} \quad (6)$$

Grands principes de la méthode xTAN

La matrice des vecteurs de base constitue le jacobien du système J . La variété terminale peut alors s'écrire :

$$e_\alpha = J_{\alpha\beta}x^\beta + L_{\alpha\beta}x^\beta \quad (7)$$

D'où :

$$\Gamma_{\zeta\alpha} (e_\alpha - L_{\alpha\beta}x^\beta) = \Gamma_{\zeta\alpha} J_{\alpha\beta}x^\beta, \Gamma_{\zeta\alpha} = (J_{\alpha\beta})^T \quad (8)$$

or $\Gamma_{\zeta\alpha} J_{\alpha\beta} = G_{\zeta\beta}$ Finalement :

$$T_\zeta = G_{\zeta\beta}x^\beta \quad (9)$$

qui est le système d'équations de représentation du système construit.

Une variété représentant un système, ses transformations doivent suivre les transformations du système. Il est cependant en pratique intéressant de la "découper" en ses briques fondamentales : métrique, sources et topology. On peut ainsi agir par transformation sur ses sources, métrique ou constituants. En notant T les sources, G la métrique et S l'ensemble des constituants (sous-variétés primitives et connectivité), on peut lister ces objets mathématiques pour finalement garder la connaissance du système. On nomme "tenfold" une telle liste écrite sous la forme : $\check{u} = (S, G, T)$. Dès lors un transformateur doit pouvoir agir différemment (ou pas) sur chacun de ces éléments. Dans le cas général, un transformateur s'écrira : $\check{t} = (t_1, t_2, t_3)$.

L'algèbre des tenfolds

Appliquer un transformateur à un tenfold pour traduire ses évolutions suit la règle suivante :

soit le transformateur $\check{t} = (t_1, t_2, t_3)$ appliqué au tenfold $\check{u} = (S, G, T)$, le tenfold résultat $\check{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est défini par :

$$\check{v} = \check{t} \cdot \check{u} = \begin{cases} v_1 = t_1 S \\ v_2 = (t_2)^T G t_2 \\ v_3 = t_3 T \end{cases} \quad (10)$$

Cette algèbre qui ne fait que définir des opérations entre des éléments de liste est suffisante pour détailler les transformations apportées aux variétés sous-jacentes aux systèmes représentés. On a une correspondance parfaite entre l'ensemble des variétés \mathbb{M} et celui des tenfolds \mathbb{T} .

Propagateur

Partant d'un tenfold \check{u} un système peut évoluer vers différents états impliquant des transformations plus ou moins profondes de sa structure. On décrit l'évolution d'un système par exemple vers 3 états par, d'une part un vecteur des états \check{u} et un vecteur d'information l :

$$\check{u} = \begin{bmatrix} \check{u}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ce dernier vecteur mémorise la probabilité qu'a chaque état d'exister au cours du temps. On peut alors définir un propagateur γ constitué d'une matrice qui engendre les états du système au cours du temps et d'une matrice $\tilde{\gamma}$ de markov qui associe les probabilités d'occurrence de ces états.

Propagateur

Par exemple l'application du propagateur suivant :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \check{t}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \check{t}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

au système \check{u}, l précédent engendre en deux temps :

$$\gamma\gamma\check{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \check{t}_1\check{t}_0\check{u}_0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{32}p_{21} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Les probabilités p_{xy} sont bayésiennes, permettant d'introduire comme condition de réalisation des faits comme des signaux du système mais aussi des interprétations psychologiques des utilisateurs.

Grands principes de la méthode xTAN

Le graphe sert de base pour traduire une pensée d'ingénieur, il concrétise sa perception du système et de ses interactions. Il sert ensuite de support pour une chirurgie topologique appliquée aux variétés associées aux mécanismes physiques ou concepts manipulés dans le système. On peut alors travailler sur cette variété différentielle, ses courbures et évolutions qui deviennent la nouvelle représentation du système étudié dont on a plus besoin de garder la perception "réelle", sauf pour valider l'analyse en confrontation avec l'expérimentation. Les évolutions du système sont traduites en évolutions de la variété. En accrochant une probabilité à chaque occurrence, on peut coupler l'évolution avec une théorie des jeux : c'est la méthode xTAN.

Exemple : gestion d'une crise projet en CEM

La situation d'un équipement qui n'est pas conforme aux tests en CEM est une situation de jeu. Les acteurs sont les personnes impliquées dans la conception, les spécialistes de l'équipementiers, ses responsables qualité, etc., le client avec ses propres spécialistes, concepteurs systèmes, etc. On comprend que les jeux réels des sociétés animales dont humaines sont rapidement extrêmement complexes. D'où l'existence de métiers spécialisés (médecin, ergothérapeutes, sociologues, juristes, biologistes, ...) qui abordent ces problèmes de façon macroscopique en intégrant les dimensions systémiques de ces problèmes pour lesquels des démarches cartésiennes deviennent très insuffisantes.

Multidisciplinarité

Néanmoins, l'exercice multidisciplinaire entre les sciences dures et les sciences "molles" est indispensable. Il oblige chaque partie à élargir ses vues et concilier ses démarches pour intégrer une part respectivement de formalisme mathématique et de complexité (au sens premier : interactions plus aléas plus émergences). La meilleure connexion aujourd'hui réalisée l'a été par le biais de la théorie des jeux qui permet d'intégrer dans un formalisme mathématique les connaissances des deux sciences. Ce constat a été à l'origine du travail de couplage entre l'analyse tensorielle des réseaux et la théorie des jeux.

Exemple : gestion de crise CEM

On imagine une électronique qualifiée non conforme au test de CEM d'émissions conduites. Deux actions correctives sont envisageables :

1. ajouter un condensateur de filtrage en sortie de l'électronique en parallèle aux condensateurs existants ;
2. modifier la valeur du (ou des) condensateurs déjà existant en le(s) remplaçant par un autre, optimisé.

Le choix de la solution n'est pas trivial car les modèles réels des condensateurs tenant compte de leurs inductances propres, etc., font que l'on ne peut pas intuiter le résultat des modifications potentielles.

Deux acteurs jouent : le responsable de projet et un expert en CEM. La fonction d'utilité G , qui permet de chiffrer les pertes engendrées par les actions des acteurs, pourrait être attachée à la somme des écarts entre la mesure $m(f)$ et le gabarit $l(f)$:

$$G = \alpha \int_0^F df (l(f) - m(f)) \quad (14)$$

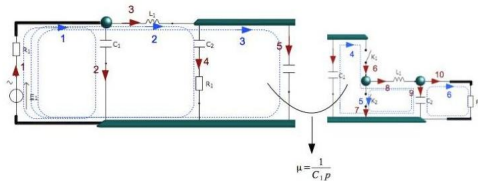
Pour cette explication, on limite le jeu à trois modifications et nous chiffrons les pertes en affectant un coût de 1 à chaque essai supplémentaire effectué.

Comme autres règles, nous admettons que la connaissance des résultats est partagée au bout de trois essais, mais que le savoir par contre n'est pas partagé. C'est ce qui d'ailleurs nous conduira à définir des profils de compétences.

Exemple : gestion de crise CEM

La figure suivante montre le graphe qui avait été élaboré et qui modélise l'électronique mesurée ainsi que le dispositif de mesure.

Le condensateur C_1 peut donc être remplacé ou complété d'un autre condensateur en parallèle. Le tenfold modélisant le système à son origine (\check{u}_0) peut se voir appliquer deux transformateurs correspondant, dans l'ordre, aux deux hypothèses de modifications envisagées : \check{t}_1 , \check{t}_2 .



Dans l'illustration que nous donnons des mécanismes, le calcul précis des émissions conduites de l'électronique ne sert plus à rien. Mais on comprend qu'une étude réelle en général, exploitera les résultats des calculs sur le système pour chiffrer les gains et leurs espérances. Il s'avère que la solution 2 répond immédiatement au problème. L'étude se limite donc dans ce cas à savoir quand l'expert se décidera à opter pour cette solution, seul, ou sous l'influence du chef de projet.

Exemple : gestion de crise CEM

Mais en dehors des pondérations probabilistes, l'arbre est entièrement construit par le propagateur (gamma matrice) suivant :

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{t}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \check{t}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{t}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{t}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{t}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{t}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

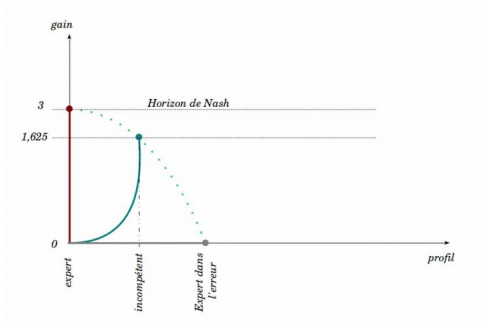
Les applications successives de γ décrivent l'arbre d'évolution : $\gamma \dots \gamma \gamma \check{u}_0$.
Comme ici on s'est limité à 3 étapes, l'arbre est donné par $\gamma \gamma \gamma \check{u}_0$.

Exemple : gestion de crise CEM

On comprend que suivant les hypothèses du jeu, que nous avons ici simplifiées, suivant les relations entre les acteurs, etc., l'affectation des probabilités de choix devient un travail qui ne peut être assuré que par des psychologues. Cependant, certains raisonnements simples amènent à des résultats pertinents. Considérons ici l'expert dans un jeu à un seul acteur, sans chef de projet. S'il est incompetent et essaie des solutions au hasard, on peut affecter une probabilité de 0,5 au choix de la transformation retenue à chaque étape. Si par contre l'expert est très rigoureux et compétent (effectue des calculs, des simulations, etc.), la probabilité de choix pour \check{t}_2 au premier jet est égale à 1. Enfin, imaginons un expert "têtu" qui tourne en rond sur la solution \check{t}_1 , la probabilité de choix de \check{t}_2 sera de 0. Ces hypothèses de comportements sont autant de définitions de profils psychologiques des acteurs, qui vont déterminer autant de matrices de Markov associées.

Exemple : gestion de crise CEM

Si l'on trace des courbes de représentation avec en abscisse les profils et en ordonnée le gain calculé par $3 - E(\text{pertes})$ (jeu à somme nulle et $E(\text{pertes})$ est une espérance de pertes), on obtient le graphe gain-profil sur le maximum de jets nécessaires pour réussir présenté ci-dessous.



Exemple : gestion de crise CEM

L'expert qui s'entête dans son mauvais choix ne peut qu'échouer au bout de trois essais. Son espérance de pertes est donc de 3. Soit un gain tel que nous l'avons défini égal à zéro. L'expert rigoureux réussit du premier coup. Sa perte est nulle, son gain est égal à 3. L'incompétent a 50% de chance de tirer la transformation \checkmark_2 à chaque essai. S'il parvient au bout de trois essais, son espérance de pertes est de $0.5 + 0.25 * 2 + 0.5^3 * 3$, soit un gain de 1,625.

Il est clair que si l'on réintroduit le chef de projet, ou toute communauté observatrice ; si par ailleurs tous les experts connaissent les stratégies de tous les experts possibles au bout de trois essais (hypothèse du partage de connaissance au bout de trois essais), tous les acteurs vont opter pour la transformation \checkmark_2 lors d'un quatrième essai et ce, quel que soit leur profil, exclu le premier qui de toute façon a choisi cette transformation au premier essai. Tout acteur ne saurait continuer à choisir \checkmark_1 sans affaiblir sa position : sa stratégie serait indéfendable vis à vis du chef de projet qui comptabilise les pertes, de la communauté qui jugerait son incompétence, etc.

Donc tous les acteurs tôt ou tard sachant ce que les autres savent et étant rationnels (pas de comportement suicidaire, càd d'expert désirant maintenir l'erreur pour volontairement tuer sa renommée ou faire échouer le projet par vengeance) choisiront la transformation \check{t}_2 . En recalculant le gain pour 4 essais possibles, on trouvera un gain non nul. La courbe rejoignant tous les gains pour toutes les situations de choix et trajectoires est donc rejointe tôt ou tard, car aucun joueur rationnel ne peut vouloir ne pas la rejoindre sans affaiblir sa position. J'ai proposé d'appeler cette courbe un " horizon de Nash " en évocation du théorème de l'équilibre de Nash en théorie des jeux. Attention, il ne s'agit ici que d'une évocation se raccrochant aux principes de rationalité, choix unique en sachant que l'autre sait qu'il sait, etc., et principe de non affaiblissement de la position. Mais on y rajoute des notions de jugement externe, temporalité, etc.

Cet exemple illustre bien que la méthode de KRON va permettre de calculer un résultat non intuitif attaché à des observables choisies sur un système compliqué. Étendue aujourd'hui avec la seconde géométrisation, elle s'inscrit pleinement dans les outils de la géométrie différentielle. La théorie des jeux va donner l'ossature pour accrocher aux résultats donnés par les observables des jugements qui vont conduire à des décisions. Ces décisions sont pondérées par des probabilités associées à des comportements humains en situations psychologiques diverses. Enfin les représentations de gains dépendant de transformations ou de profils aident à l'interprétation des résultats complexes, comme le système auxquels ils appartiennent et cette fois dans toute l'assertion définie par la systémique. Merci pour votre attention !