

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Um Modelo Matemático de Timoshenko Não  
Linear para uma Viga Elástica com Força  
Axial**

por

**Robert Jesús Rodríguez Reyes**

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen  
Orientador

Porto Alegre, setembro de 2009

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Robert Jesús Rodríguez Reyes

Um Modelo Matemático de Timoshenko Não Linear para  
uma Viga Elástica com Força Axial

/ Robert Jesús Rodríguez Reyes .—Porto Alegre:  
PPGMAp da UFRGS, 2009 .

102 p.: il.

Tese de Doutorado—Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação  
em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2009. Orientador:  
Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Área: Matemática Aplicada

Palavras chave: Sistema não linear de Timoshenko , Energia  
conservativa , modos normais, método de Galerkin

# Um Modelo Matemático de Timoshenko Não Linear para uma Viga Elástica com Força Axial

por

**Robert Jesús Rodríguez Reyes**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

**Doutor em Matemática Aplicada**

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. José Manoel Balthazar - UNESP

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano - PPGMap/UFRGS

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino - PPGMAT/UFRGS

Prof. Dr. Waldir Roque

Coordenador do PPGMap

Porto Alegre, 10 de setembro de 2009

## AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares, que foram fundamentais para a realização do Curso de Doutorado e que me proporcionaram todo o amor, carinho e apoio necessários para atingir esta meta; aos meus pais Alberto e María Rodríguez e minha esposa Mariele Maris pela compreensão e auxílio incondicional.

Ao Professor Júlio Claeysen pela confiança, ensinamentos, incentivo, dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho, bem como acesso a seus trabalhos de pesquisa.

A todos os meus amigos e colegas com quem dividí tantos momentos alegres e também os não tão alegres.

A Deus, pela direção e inspiração para enfrentar os momentos difíceis na realização deste trabalho.

Agradeço ao PPGMAp, pela oportunidade e disponibilização dos recursos humanos e materiais.

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	v
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	vi
RESUMO . . . . .	viii
ABSTRACT . . . . .	ix
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	7
2.1 Hipóteses básicas . . . . .	7
2.2 Tensor de tensões e deformações . . . . .	8
2.3 Energia potencial e cinética do sistema . . . . .	13
2.4 Formulação Hamiltoniana . . . . .	15
2.4.1 O Princípio de Hamilton . . . . .	15
2.5 Equações de Euler e condições de fronteira . . . . .	16
2.5.1 As condições iniciais . . . . .	23
3 FUNÇÃO DE ENERGIA PARA OS MODELOS DE TIMO- SHENKO LINEAR E NÃO-LINEAR . . . . .	24
4 MODOS NORMAIS PARA O MODELO LINEAR DE TIMO- SHENKO . . . . .	28
4.1 Equação Modal . . . . .	29

4.2	Modos Normais . . . . .	32
<b>5</b>	<b>EQUAÇÃO CARATERÍSTICA E MODOS DA VIGA DE TIMOSHENKO LINEAR . . . . .</b>	<b>35</b>
5.1	Cálculo de $h(x)$ . . . . .	36
5.2	Cálculo de $h(x)$ na forma adimensional . . . . .	39
5.3	Viga Apoiada-Apoiada . . . . .	42
5.4	Viga Apoiada-Apoiada com $h$ adimensional . . . . .	44
5.5	Viga Fixa-Apoiada . . . . .	47
5.6	Viga Fixa-Fixa . . . . .	50
<b>6</b>	<b>O MÉTODO ESPECTRAL DE GALERKIN PARA O MODELO NÃO-LINEAR DE TIMOSHENKO . . . . .</b>	<b>53</b>
6.1	Formulação matricial . . . . .	54
6.2	Caso Sincronizado . . . . .	55
6.3	O caso da viga Apoiada-Apoiada . . . . .	58
6.3.1	O sistema infinito . . . . .	63
6.3.2	O sistema finito . . . . .	64
<b>7</b>	<b>EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O SISTEMA DO TIPO BI-APOIADO . . . . .</b>	<b>66</b>
7.1	O sistema infinito . . . . .	66
7.2	O sistema finito . . . . .	70

8	UNICIDADE DE SOLUÇÕES . . . . .	86
9	CONCLUSÕES . . . . .	93
	APÊNDICE A    DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO $E_{IN}$ . . . . .	94
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	97

# Lista de Figuras

Figura 2.1	Eixo ou linha central da viga . . . . .	7
Figura 2.2	Viga no estado inicial . . . . .	8
Figura 2.3	Deformação de uma viga de Timoshenko: $\beta$ representa a de- formação cisalhante transversal . . . . .	11



# Lista de Símbolos

$A$	área da secção transversal
$C$	deslocamento axial nos extremos da viga
$C_i(x)$	autofunção
$D$	densidade de energia de deformação
$E$	módulo elástico de Young
$G$	módulo de rigidez
$h(x)$	resposta impulso estacionária
$h'(x)$	derivada temporal da resposta impulso
$i$	unidade complexa
$I$	momento de inércia, matriz identidade
$J$	hamiltoniano
$\mathcal{K}$	energia cinética
$\mathbf{K}$	matriz coeficiente de rigidez, matriz diagonal
$L$	comprimento da viga
$\mathbf{L}$	matriz diagonal
$\mathbf{M}, \mathcal{M}$	matriz de massa
$\mathbf{0}$	matriz nula
$P(s)$	polinômio característico
$\mathcal{S}$	energia potencial total
$S_i(x)$	autofunção
$t$	tempo
$U(t, x, z)$	deslocamento no eixo x de qualquer ponto da viga no tempo t
$U^0(t, x)$	deslocamento no eixo x da linha central da viga no tempo t
$V(t, x, z)$	deslocamento no eixo y de qualquer ponto da viga no tempo t

$\mathcal{V}_{da}$	energia potencial devido à deformação axial
$\mathcal{V}_{cis}$	energia potencial devido ao cisalhamento
$\mathcal{V}_{fl}$	energia potencial devido à flexão
$W_i(t)$	amplitudes
$W(t, x, z)$	deslocamento no eixo z de qualquer ponto da viga no tempo t
$W^0(t, x)$	deslocamento no eixo z da linha central da viga no tempo t
$\beta$	deformação cisalhante transversal
$\Delta$	determinante característico
$\kappa$	fator relacionado a forma da secção transversal
$\lambda$	autovalores
$\nu$	taxa de Poisson
$\rho$	densidade linear
$\Psi(t, x)$	ângulo de rotação da secção transversal
$\Psi_i(t)$	amplitudes
$\omega_j$	$j$ -ésima frequência natural
$\Omega$	matriz espectral

# RESUMO

Este trabalho faz uma pesquisa das vibrações de uma viga elástica não-linear de Timoshenko sobre a influência de força axial e com uso do método espectral de Galerkin. O modelo não-linear de Timoshenko é obtido através do princípio estendido de Hamilton. A função de energia é derivada de maneira geral, incluindo o caso linear, e com identificação das condições de contorno de natureza conservativa. A determinação das autofunções do sistema linear é realizada através de um problema de autovalor descrito por uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes matriciais que dependem não-linearmente no autovalor. A ortogonalidade das autofunções é obtida para as condições de contorno clássicas. As correspondentes autofunções são obtidas na base de Euler e na base gerada pela função matricial de Green de valor inicial. O método de Galerkin foi formulado matricialmente e a existência e unicidade foi obtida para uma viga bi-apoiada com o uso da função da energia e dados regulares.

# ABSTRACT

This work investigates the vibrations of a nonlinear elastic Timoshenko beam, subject to an axial force, using the spectral method of Galerkin. The nonlinear model of Timoshenko is obtained through extended Hamilton's principle. The energy function is derived in a general form, including the linear case, and with identification of the boundary conditions of conservative nature. The determination of the eigenfunctions of the linear system is done through an eigenvalue problem described by a second-order differential equation with matrix coefficients that depend non-linearly upon the eigenvalue. The orthogonality of the eigenfunctions is obtained for classical boundary conditions. The corresponding eigenfunctions are determined in the Euler's base and with the base generated by the initial value matrix Green function. The method of Galerkin was formulated in matrix terms and the existence and uniqueness of solutions was obtained for the bi-supported beam with use of the function of the energy and smooth data.

# 1 INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo vibrações com vigas têm merecido a atenção de muitos pesquisadores devido a sua importância em variadas aplicações. Em particular, asas de aviões, motores de helicópteros, satélites flexíveis, braços robóticos, em questões relativas a trilhos de trens, em subsistemas de estruturas mais complexas e, mais recentemente, em vários aspectos da nanotecnologia.

Devido à complexidade dos fenômenos vibratórios envolvidos, diversos modelos estruturais têm sido motivo de estudo. Hirschhorn e Reiss, em [31] estudaram um problema de estabilidade dinâmica de uma viga descrita por um modelo de Timoshenko (Timoshenko [44], [45] ou [46]) (que inclui deformação devido a cisalhamento e inércia rotatória, permitindo dados iniciais com altas e baixas frequências) modificado com a introdução de uma não-linearidade devido ao efeito de uma compressão axial. Na forma adimensional, o movimento transiente é governado pelas equações do movimento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) &= \left[ cd - a + b \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) - cd \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t, x) &= c \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) - c^2 d \left( \psi(t, x) - \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) \right)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$x \in \Omega = ]0, 1[ , \quad t > 0,$$

sujeita a condições iniciais e condições de contorno. As funções  $w(t, x)$  e  $\psi(t, x)$  representam o deslocamento transversal da linha central da viga e o deslocamento giratório da secção transversal da viga, respectivamente. As condições de fronteira  $w(t, 0) = w(t, 1) = 0$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 1) = 0$ ,  $t \geq 0$ , correspondem ao caso de uma viga com extremos apoiados.

As constantes  $a, b, c, d$  no sistema (1.1) são tais que

$$a, b, c, d > 0 \quad e \quad cd - a > 0, \quad (1.2)$$

onde

$$a = \frac{2CAL}{I}, \quad b = \frac{AL^2}{2I}, \quad c = \frac{L^2A}{I}, \quad d = \frac{\kappa G}{E} \quad (1.3)$$

aqui  $E$  é o módulo de Young,  $\kappa$  é um fator relacionado à forma da secção transversal da viga,  $A$  é a área da secção transversal,  $L$  é o comprimento da viga,  $I$  é o momento de inércia da área  $A$  da secção transversal,  $G$  é o módulo de rigidez e  $C$  é uma constante positiva relativa ao encurtamento da viga devido ao deslocamento axial constante  $C$  nos extremos da viga. A segunda relação em (1.2) é uma condição natural para vigas finas moderadamente compressivas. Para uma interpretação física mais aprofundada do sistema e as constantes  $a, b, c, d$  ver Inman em [33] ou Meirovitch em [38].

Do ponto de vista matemático, (1.1) é um sistema de equações quasi-lineares do tipo hiperbólico (Kato [34]). Existem duas questões matemáticas fundamentais no estudo deste sistema: existência e unicidade de soluções e estudo numérico para aproximar tais soluções. Neste trabalho estudaremos a questão de existência e unicidade de soluções do sistema (1.1).

A seguir, é feita uma breve revisão bibliográfica referente a questão de existência e unicidade.

Kirchhoff [36] e Carrier [6], de maneira independente, fizeram o estudo do caso particular de uma corda fixa sem giro

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) = \left[ c_0 + c_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) \quad (1.4)$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0$$

com  $c_0 \geq 0$ ,  $c_1 > 0$ . Na literatura, (1.4) é chamada a equação da onda tipo Kirchhoff-Carrier.

O primeiro estudo da equação (1.4), relativo à questão de existência de soluções, foi realizado por Bernstein [2] para uma equação do tipo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = M \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

onde  $M$ , chamada também de não linearidade tipo Timoshenko ([42], [39]), é uma função continuamente diferenciável em  $[0, \infty)$  tal que existe uma constante  $m_0 > 0$  tal que  $M(r) \geq m_0$ , para todo  $r \geq 0$ . Bernstein estabeleceu existência local (em  $t$ ) supondo que as condições iniciais  $w_0 = w(0, x)$  e  $w_1 = w_t(0, x)$  possuem expansões em séries de Fourier em senos, isto é,

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \text{sen} k\pi x, \quad w_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \text{sen} k\pi x,$$

com a seguinte restrição sobre os coeficientes de Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{3+\epsilon} [k^2 \alpha_k^2 + \beta_k^2] < \infty, \quad \text{para } \epsilon > 0.$$

Bernstein obteve soluções  $w(t, x)$  de (1.5) da forma

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \text{sen} k\pi x.$$

Depois de Bernstein outros resultados de existência local para a equação (1.4) foram estudadas por Dickey em [21], que provou, usando séries de Fourier, a existência e unicidade de uma solução com condições iniciais suficientemente regulares. Já Rivera, P. em [42] estudou a existência e unicidade de uma solução

local para uma extensão da equação (1.4), mais precisamente para a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= M \left( \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w \\ x \in \Omega, \quad t &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

com as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{aligned} w(0, x) &= w_0(x) \quad w_t(0, x) = w_1(x), \\ w &= 0, \text{ em } \partial\Omega \text{ (fronteira de } \Omega) \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde  $\Omega$  é um subconjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $M$ , chamada também de não linearidade tipo Timoshenko ([42], [39]), é uma função continuamente diferenciável em  $[0, \infty)$  tal que existe uma constante  $m_0 > 0$  tal que  $M(r) \geq m_0$ , para todo  $r \geq 0$ . O estudo de Rivera foi baseado na aproximação de Galerkin e o método da energia.

Abordaram ainda estudos de existência local para a equação (1.6) mais para o caso fracamente hiperbólico,  $M(r) \geq 0$ , também chamado caso degenerado, Arosio e Garavaldi em [1], Ebihara em [24] e [25], Garavaldi [26], Yamada [51], Yamazaki em [52], entre outros.

A questão de existência e unicidade de uma solução para o problema (1.1) ( generalização da equação (1.4) ) foi inicialmente estudada por Tucsnak em [48], que provou, usando os métodos de Galerkin e da energia, que o problema tem solução local na variável tempo se as condições iniciais são suficientemente diferenciáveis. Utilizando o método de Bernstein [2], o trabalho de Peradze em [40] mostrou que o problema (1.1) tem solução global no tempo e analítica em  $x$ , supondo as condições iniciais como funções analíticas. Porém, as metodologias de Tucsnak e Peradze utilizam uma função de energia que não permite reproduzir a situação do caso linear.



Neste trabalho, temos estendido o método de Dickey [21] para incluir a equação do giro com o uso de autofunções acopladas e introduzir a energia do sistema de modo tal que possa reproduzir o caso linear.

O cálculo das autofunções ou modos é feito utilizando o método de Claeysen ([9], [11], [12], [13], [14], [15], [47]). O método permite determinar os modos com o uso de uma base matricial gerada por uma resposta fundamental no seu próprio espaço físico. Isto permite abordar o problema linear da viga sem a necessidade de desacoplá-lo em equações de quarta ordem, porém acoplados através das condições de contorno. O método de Claeysen também é usado na determinação de respostas forçadas e em métodos perturbativos ([3], [4], [8], [10], [17], [18], [27]).

Apresentamos os resultados desta tese como descrito abaixo.

No capítulo 2 abordamos a formulação do problema usando a teoria não linear para vigas tipo Timoshenko. As equações de movimento e as expressões para as condições de contorno são derivadas usando o princípio de Hamilton. Este princípio primeiro define uma integral da equação de Lagrange e, em seguida, considera o estado estacionário desta integral em uma dada perturbação. O modelo não linear de Timoshenko para a viga elástica é descrito por um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem acopladas.

No capítulo 3 calculamos a energia do sistema de equações acopladas. Esta energia é apresentada de modo tal que envolve ao mesmo tempo o caso linear e não linear.

No capítulo 4 estudou-se o modelo de Timoshenko linear na forma matricial como um sistema evolutivo de segunda ordem usando uma fórmula fechada, devido a Claeysen, chamada de solução dinâmica do sistema. Tal abordagem generaliza a forma clássica de aplicação do método espectral encontrada na literatura. Além disso, distingue-se por usar as condições de contorno apenas na obtenção da equação característica

No capítulo 5 discutimos a equação característica e modos para uma viga de Timoshenko linear com condições de contorno tipo apoiada-apoiada, fixa-apoiada e fixa-fixa. As equações características e os modos foram calculadas usando a base dinâmica.

No capítulo 6, o método de Galerkin é formulado matricialmente com o uso dos modos normais, obtendo-se um sistema de equações diferenciais ordinárias para as amplitudes modais do deslocamento e do giro. Para o caso sincronizado, obtém-se um único sistema para as amplitudes modais.

Nos capítulos 7 e 8 apresentamos teoremas de existência e unicidade para uma viga de Timoshenko não linear com condições de contorno tipo apoiada-apoiada. Nestes capítulos estendemos as idéias de Dickey [21]. Crucial no estudo de Dickey foi o análise de certa função  $E_{in}$  (ver [21] ) que pode ser considerada como uma função de Liapunov. É esta função que modificamos e estendemos para nossos propósitos.

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema mecânico sob consideração são as vibrações de uma viga com deslocamento axial constante e compressível em cada extremo da viga, sujeito a condições iniciais dadas.

Assim, o objetivo deste capítulo consiste em obter o modelo matemático do problema mecânico. Para isso usaremos a teoria não linear para vigas tipo Timoshenko [28].

### 2.1 Hipóteses básicas

Consideremos uma viga de material

- Elástico linear.
- Homogêneo: possui as mesmas propriedades em todos os seus pontos.
- Isotrópico: as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções.
- Com uma dimensão consideravelmente maior que as outras duas (viga fina) como ilustrada na figura 2.1.

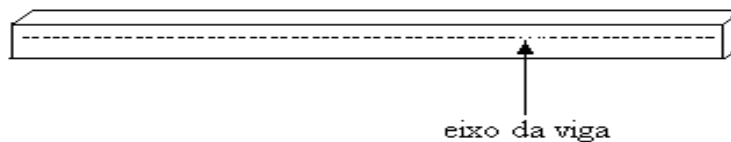


Figura 2.1 Eixo ou linha central da viga

Suponhamos que o movimento da viga está no plano  $x, z$ . O eixo da viga ( ou linha central da viga ) no estado não deformado coincide com o intervalo  $0 \leq x \leq L$  do eixo  $x$ , conforme a figura 2.2.

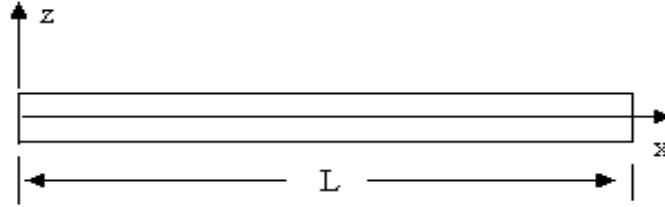


Figura 2.2 Viga no estado inicial

Desde que o eixo da viga se move unicamente no plano  $x, z$  todos os deslocamentos e tensões são independentes de  $y$ .

Os deslocamentos nas direções  $x$  e  $z$  de qualquer ponto da viga, no tempo  $t$ , serão denotados por  $U(t, x, z)$  e  $W(t, x, z)$  respectivamente. O deslocamento na direção  $y$  será denotado por  $V(t, x, z)$  e é assumido zero.

## 2.2 Tensor de tensões e deformações

Da teoria de análise de tensões e deformações ([43]) sabemos que o tensor de deformações de Green-Lagrange está dado por

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \quad (2.1)$$

onde  $u_1, u_2$  e  $u_3$  são os deslocamentos nas direções  $x, z$  e  $y$  respectivamente.

Usando a notação integral de (2.1) e pela simetria de  $E_{ij}$  obtemos as seguintes relações entre os deslocamentos e o tensor de deformações

$$\begin{aligned}
E_x &= U_x + \frac{1}{2} [U_x^2 + V_x^2 + W_x^2] \\
E_{xy} &= \frac{1}{2} [V_x + U_y + U_x U_y + V_x V_y + W_x W_y] = E_{yx} \\
E_{xz} &= \frac{1}{2} [W_x + U_z + U_x U_z + V_x V_z + W_x W_z] = E_{zx} \\
E_y &= V_y + \frac{1}{2} [U_y^2 + V_y^2 + W_y^2] \\
E_{yz} &= \frac{1}{2} [W_y + V_z + U_y U_z + V_y V_z + W_y W_z] = E_{zy} \\
E_z &= W_z + \frac{1}{2} [U_z^2 + V_z^2 + W_z^2]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Das hipóteses temos que  $V = 0$  e supondo  $E_z = 0$ , conseguimos de (2.2) as expressões

$$\begin{aligned}
E_x &= U_x + \frac{1}{2} [U_x^2 + W_x^2] \\
E_{xz} &= \frac{1}{2} [W_x + U_z + U_x U_z + W_x W_z] = E_{zx} \\
E_y &= E_{yz} = E_{zy} = E_{xy} = E_{yx} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Além disso, assume-se que os gradientes dos deslocamentos  $|U_x|$  e  $|W_z|$  mantem-se pequenos em relação à unidade. Portanto obtemos de (2.3) as seguintes relações aproximadas

$$\begin{aligned}
e_x &= U_x + \frac{1}{2}W_x^2 \\
e_{xz} &= \frac{1}{2}(U_z + W_x)
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

Para  $e_x$  e  $e_{xz}$  denotemos as correspondentes tensões por  $\sigma_x$  e  $\sigma_{xz}$ . Todas as outras tensões assume-se negligenciáveis.

**Observação 2.1.** *Na teoria não linear de Euler-Bernoulli [41] a expressão para  $e_x$  é mantida, no entanto é assumido  $e_{xz} = 0$ .*

Para um material elástico linear a lei de Hooke escreve-se como

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij} \tag{2.5}$$

onde a constante  $E$  é chamada de módulo de elasticidade ou módulo de Young. A constante  $\nu$  é a taxa de Poisson. A forma geral da expressão (2.5) é dada por

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
e_y &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
e_z &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
e_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy} \\
e_{yz} &= \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz} \\
e_{xz} &= \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{xz} = \frac{1}{2G}\sigma_{xz}
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

onde a constante  $G$  é o módulo de rigidez ou módulo de cisalhamento da viga. Considerando somente  $e_x$  e  $e_{xz}$  ( e portanto  $\sigma_x$  e  $\sigma_{xz}$ ) podemos reescrever (2.6) como

$$\sigma_x = Ee_x, \quad \sigma_{xz} = 2Ge_{xz} \quad (2.7)$$

Assuma-se, como é costume na teoria de vigas ([28], [41]), que os deslocamentos dependem linearmente em  $z$ . Especificamente temos

$$\begin{aligned} U(t, x, z) &= U^0(t, x) - z\Psi(t, x), \\ W(t, x, z) &= W^0(t, x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aqui,  $U^0$  e  $W^0$  são os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $z$  respectivamente da linha central da viga e  $\Psi$  é o ângulo de rotação da secção transversal (figura 2.3).

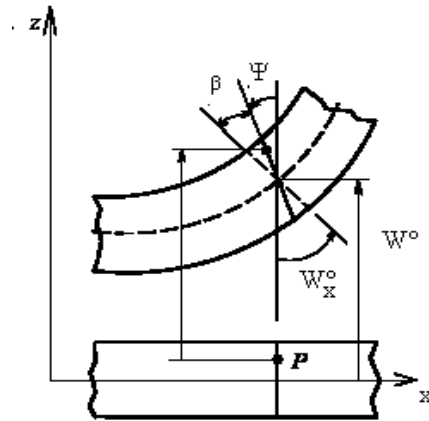


Figura 2.3 Deformação de uma viga de Timoshenko:  $\beta$  representa a deformação cisalhante transversal

**Observação 2.2.** Para obter a formulação linear do problema devemos adicionar além das hipóteses já feitas o fato que  $|W_x| \ll 1$  na equação (2.4).

Da observação anterior, temos que os casos linear e não linear podemos colocar num só modelo combinando as seguintes expressões

$$\begin{aligned} U(t, x, z) &= \alpha U^0(t, x) - z\Psi(t, x), \\ W(t, x, z) &= W^0(t, x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

junto com as expressões

$$\begin{aligned} e_x &= U_x + \frac{1}{2}\alpha W_x^2 \\ e_{xz} &= \frac{1}{2}(U_z + W_x) \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde  $\alpha = 0$  (caso linear) ou 1 (caso não linear).

Substituindo as equações de (2.9) em (2.10) e (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} e_x &= \alpha e_x^0 - z\Psi_x, \quad e_x^0(t, x) = U_x^0 + \frac{1}{2}(W_x^0)^2 \\ e_{xz} &= e_{xz}^0(t, x) = \frac{1}{2}(W_x^0 - \Psi) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\sigma_x = \alpha\sigma_x^0 - zE\Psi_x, \quad \sigma_x^0 = Ee_x^0$$

$$\sigma_{xz} = 2Ge_{xz}$$

As funções  $e_x^0$  e  $\sigma_x^0$  são respectivamente a deformação axial e a tensão axial da linha central da viga.



## 2.3 Energia potencial e cinética do sistema

A densidade de energia de deformação para materiais que satisfazem a lei de Hooke [28] é

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} e_{ij}. \quad (2.12)$$

Desde que negligenciamos todas as tensões menos  $\sigma_x$  e  $\sigma_{xz}$ , segue de (2.12)

$$D = \frac{1}{2} \sigma_x e_x + \sigma_{xz} e_{xz}.$$

A energia potencial total,  $\mathcal{S}$ , para a viga está dada por

$$\mathcal{S} = \int_0^L \iint_A D dy dz dx$$

onde  $A$  é a área da secção transversal. Da última relação obtemos

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_0^L \iint_A (\sigma_x e_x + 2\sigma_{xz} e_{xz}) dy dz dx. \quad (2.13)$$

Considerando as expressões (2.7) reescrevemos (2.13) como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_0^L \iint_A E e_x^2 dy dz dx + \int_0^L \iint_A \sigma_{xz} e_{xz} dy dz dx. \quad (2.14)$$

ou equivalentemente de (2.11)

$$\mathcal{S} = \frac{E}{2} \int_0^L \iint_A (\alpha e_x^0 - z \Psi_x)^2 dy dz dx + \int_0^L e_{xz} \left( \int_A \sigma_{xz} dy dz \right) dx. \quad (2.15)$$

De [19] temos que

$$\int_A \sigma_{xz} dy dz = 2\kappa G A e_{xz} \quad (2.16)$$

onde  $\kappa$  é uma constante chamada de coeficiente de cisalhamento que depende da forma da secção transversal. Por exemplo,  $\kappa = 5/6$  para secção transversal rectangular

plana e  $\kappa = 1/1.175$  para uma secção transversal circular plana. Existem muitos métodos para a determinação de  $\kappa$  que podem encontrar-se em [19].

Através de manipulações algébricas e assumindo que

$$\iint_A z dy dz = 0$$

e considerando a definição de momento de inércia da secção transversal  $I$  dado pela expressão

$$\iint_A z^2 dy dz = I$$

reescrevemos  $\mathcal{S}$  como

$$\mathcal{S} = \mathcal{V}_{da} + \mathcal{V}_{cis} + \mathcal{V}_{fl} \quad (2.17)$$

onde  $\mathcal{V}_{da}$  é a energia potencial devido a deformação axial e está dada por

$$\mathcal{V}_{da} = \frac{EA\alpha^2}{2} \int_0^L \left( U_x^0 + \frac{1}{2}(W_x^0)^2 \right)^2 dx \quad (2.18)$$

O termo  $\mathcal{V}_{cis}$  é a energia potencial devido ao cisalhamento e está dada por

$$\mathcal{V}_{cis} = \frac{\kappa GA}{2} \int_0^L (W_x^0 - \Psi)^2 dx \quad (2.19)$$

Por último o termo  $\mathcal{V}_{fl}$  é a energia potencial devido à flexão e é dada por

$$\mathcal{V}_{fl} = \frac{EI}{2} \int_0^L \Psi_x^2 dx \quad (2.20)$$

Por outro lado a energia cinética,  $\mathcal{K}$ , é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{\rho A}{2} \int_0^L (W_t^0)^2 dx + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \Psi_t^2 dx \quad (2.21)$$

isto é, a energia cinética é a soma da energia cinética devida ao deslocamento lateral e a energia cinética devida à rotação da secção transversal. Na equação (2.21)  $\rho$  representa a densidade da viga .

**Observação 2.3.** *A energia cinética devida ao deslocamento axial é negligenciável como é costume na teoria de vigas.*

## 2.4 Formulação Hamiltoniana

Nesta seção as equações do movimento serão obtidas usando o princípio de Hamilton.

Assuma que nos extremos,  $x = 0, L$ , da viga, temos a condição axial seguinte

$$U^0(t, 0) = -U^0(t, L) = C \quad (2.22)$$

a condição axial (2.22) estabelece que os extremos da viga são compressíveis por um deslocamento axial constante  $C$ .

Assim, a formulação Hamiltoniana,  $J$ , para a viga é

$$J = \int_{t_a}^{t_b} (\mathcal{S} - \mathcal{K}) dt; \quad (2.23)$$

observe-se que  $J$  é um funcional de  $U^0, W^0$  e  $\Psi$ .

### 2.4.1 O Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton ( [29], [37] ou [38] ) estabelece que a integral  $J$  deve assumir um valor estacionário quando  $U^0, W^0$  e  $\Psi$  correspondem ao movimento que realiza o sistema entre os tempos  $t_a$  e  $t_b$ . Assim, dada uma perturbação de  $U^0, W^0$  e  $\Psi$

$$U^0 + \epsilon \tilde{U}^0, \quad W^0 + \epsilon \tilde{W}^0 \quad \text{e} \quad \Psi + \epsilon \tilde{\Psi} \quad (2.24)$$

deve-se ter que

$$\left. \frac{dJ(U^0 + \epsilon \tilde{U}^0, W^0 + \epsilon \tilde{W}^0, \Psi + \epsilon \tilde{\Psi})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon \rightarrow 0} = 0 \quad (2.25)$$

isto é, a derivada de Gateux do funcional  $J$  deve anular-se para  $\tilde{U}^0$ ,  $\tilde{W}^0$  e  $\tilde{\Psi}$  tais que

$$\begin{aligned} \tilde{U}^0(t_a, x) &= \tilde{U}^0(t_b, x) = 0 \\ \tilde{W}^0(t_a, x) &= \tilde{W}^0(t_b, x) = 0 \\ \tilde{\Psi}(t_a, x) &= \tilde{\Psi}(t_b, x) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.5 Equações de Euler e condições de fronteira

Nesta seção obtém-se do princípio de Hamilton (2.25) as equações de Euler e as respectivas condições de fronteira. Para isso primeiro substituímos as equações (2.17) e (2.21) no Hamiltoniano (2.23) e adicionando os incrementos  $\epsilon \tilde{U}^0$ ,  $\epsilon \tilde{W}^0$  e  $\epsilon \tilde{\Psi}$  nas variáveis  $U^0$ ,  $W^0$  e  $\Psi$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} J(U^0 + \epsilon \tilde{U}^0, W^0 + \epsilon \tilde{W}^0, \Psi + \epsilon \tilde{\Psi}) &= \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{1}{2} \left\{ EA\alpha^2 \left[ U_x^0 + \epsilon \tilde{U}_x^0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( W_x^0 + \epsilon \tilde{W}_x^0 \right)^2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \kappa GA \left( W_x^0 + \epsilon \tilde{W}_x^0 - \Psi - \epsilon \tilde{\Psi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + EI \left( \Psi_x + \epsilon \tilde{\Psi}_x \right)^2 - \rho A \left( W_t^0 + \epsilon \tilde{W}_t^0 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \rho I \left( \Psi_t + \epsilon \tilde{\Psi}_t \right)^2 \right\} dx dt. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão anterior de  $J$  em (2.25), obtemos

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ EA\alpha^2 \mathcal{I}_1 + EA\alpha^2 \mathcal{I}_2 + \kappa GA \mathcal{I}_3 + EI \mathcal{I}_4 - \rho A \mathcal{I}_5 - \rho I \mathcal{I}_6 - \kappa GA \int_0^L (W_x^0 - \Psi) \tilde{\Psi} dx \right\} dt = 0 \quad (2.27)$$

onde as integrais  $\mathcal{I}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 6$  estão dadas por

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^L (U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2) \tilde{U}_x^0 dx$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^L (U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2) W_x^0 \tilde{W}_x^0 dx$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^L (W_x^0 - \Psi) \tilde{W}_x^0 dx$$

$$\mathcal{I}_4 = \int_0^L \Psi_x \tilde{\Psi}_x dx$$

$$\mathcal{I}_5 = \int_0^L W_t^0 \tilde{W}_t^0 dx$$

$$\mathcal{I}_6 = \int_0^L \Psi_t \tilde{\Psi}_t dx$$

Integrando por partes cada uma das integrais anteriores, obtém-se

$$\mathcal{I}_1 = \left( U_x^0 + \frac{1}{2}(W_x^0)^2 \right) \tilde{U}^0 \Big|_0^L - \int_0^L \left( U_x^0 + \frac{1}{2}(W_x^0)^2 \right)_x \tilde{U}^0 dx$$

$$\mathcal{I}_2 = \left( U_x^0 + \frac{1}{2}(W_x^0)^2 \right) W_x^0 \tilde{W}^0 \Big|_0^L - \int_0^L \left[ \left( U_x^0 + \frac{1}{2}(W_x^0)^2 \right) W_x^0 \right]_x \tilde{W}^0 dx$$

$$\mathcal{I}_3 = (W_x^0 - \Psi) \tilde{W}^0 \Big|_0^L - \int_0^L (W_{xx}^0 - \Psi_x) \tilde{W}^0 dx$$

$$\mathcal{I}_4 = \Psi_x \tilde{\Psi} \Big|_0^L - \int_0^L \Psi_{xx} \tilde{\Psi} dx$$

$$\mathcal{I}_5 = \int_0^L \frac{d}{dt} (W_t^0 \tilde{W}^0) dx - \int_0^L W_{tt}^0 \tilde{W}^0 dx$$

$$\mathcal{I}_6 = \int_0^L \frac{d}{dt} (\Psi_t \tilde{\Psi}) dx - \int_0^L \Psi_{tt} \tilde{\Psi} dx$$

Substituindo-se em (2.27) as integrais recém obtidas, chega-se à seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& -EA\alpha^2 \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] \tilde{U}^0 dx dt + \\
& \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left\{ -EA\alpha^2 \left[ \left( U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right) W_x^0 \right]_x - \kappa GA (W_{xx}^0 - \Psi_x) + \rho A W_{tt}^0 \right\} \tilde{W}^0 dx dt + \\
& \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left\{ -\kappa GA (W_x^0 - \Psi) - EI \Psi_{xx} + \rho I \Psi_{tt} \right\} \tilde{\Psi} dx dt + \\
& \int_{t_a}^{t_b} EA\alpha^2 \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] \tilde{U}^0 \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_a}^{t_b} \left\{ EA\alpha^2 \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] W_x^0 + \kappa GA (W_x^0 - \Psi) \right\} \tilde{W}^0 \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_a}^{t_b} EI \Psi_x \tilde{\Psi} \Big|_0^L dt = 0
\end{aligned}$$

Como as funções  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{W}$  e  $\tilde{\Psi}$  são arbitrárias e lembrando (2.26) então as equações anteriores e o lema fundamental de cálculo de variações leva às seguintes equações de Euler

$$\begin{aligned}
& -EA\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] = 0 \\
& -EA\alpha^2 \left\{ \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] W_x^0 \right\}_x - \kappa GA (W_x^0 - \Psi)_x + \rho A W_{tt}^0 = 0 \quad (2.28) \\
& -\kappa GA (W_x^0 - \Psi) - EI \Psi_{xx} + \rho I \Psi_{tt} = 0
\end{aligned}$$

com as seguintes condições de fronteira

$$EA\alpha^2 \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] \tilde{U}^0 \Big|_0^L = 0$$

$$\left\{ EA\alpha^2 \left[ U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right] W_x^0 + \kappa GA (W_x^0 - \Psi) \right\} \tilde{W}^0 \Big|_0^L = 0 \quad (2.29)$$

$$EI\Psi_x \tilde{\Psi} \Big|_0^L = 0$$

Da primeira equação de (2.28) temos que a expressão

$$\sigma_x^0(t, x) = \alpha^2 E \left( U_x^0 + \frac{1}{2} (W_x^0)^2 \right) \quad (2.30)$$

é uma função só de  $t$ , isto é,

$$\sigma_x^0(t, x) = \sigma(t) \quad (2.31)$$

Introduzindo (2.31) nas equações de Euler (2.28), obtém-se

$$\rho A W_{tt}^0 = A\sigma(t)W_{xx}^0 + \kappa GA W_{xx}^0 - \kappa GA \Psi_x \quad (2.32)$$

$$\rho I \Psi_{tt} = EI \Psi_{xx} - \kappa GA \Psi + \kappa GA W_x^0$$

Considerando que  $\sigma$  é independente de  $x$  e integrando a equação (2.31) respeito de  $x$  ou ainda usando a condição axial (2.22), temos

$$\sigma(t) = \frac{\alpha^2 E}{L} \left( -2C + \frac{1}{2} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right) \quad (2.33)$$

Combinando a função (2.33) com as equações (2.32) obtemos finalmente as equações de movimento



$$\rho A W_{tt}^0 = \left[ \kappa G A + A \alpha^2 \left( -\frac{2CE}{L} + \frac{E}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right) \right] W_{xx}^0 - \kappa G A \Psi_x \quad (2.34)$$

$$\rho I \Psi_{tt} = EI \Psi_{xx} + \kappa G A (W_x^0 - \Psi)$$

ou equivalentemente

$$\rho A W_{tt}^0 - \kappa G A (W_{xx}^0 - \Psi_x) + \alpha^2 \left[ \frac{2CEA}{L} - \frac{EA}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right] W_{xx}^0 = 0 \quad (2.35)$$

$$\rho I \Psi_{tt} - EI \Psi_{xx} - \kappa G A (W_x^0 - \Psi) = 0$$

Usando novamente a condição axial (2.22), isto é,

$$U^0(t, 0) = -U^0(t, L) = C$$

obtemos finalmente de (2.29) as seguintes condições de fronteira

$$\left\{ EA \frac{\alpha^2}{2} (W_x^0)^3 + \kappa G A (W_x^0 - \Psi) \right\} \widetilde{W}^0 \Big|_0^L = 0 \quad (2.36)$$

$$EI \Psi_x \widetilde{\Psi} \Big|_0^L = 0$$

De (2.36) vários casos de condições de fronteira são apresentados a seguir

- **Viga apoiada-apoiada**

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi_x(t, 0) &= 0 \\ W^0(t, L) &= 0, & \Psi_x(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

- Viga **fixa-apoiada**

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi(t, 0) &= 0 \\ W^0(t, L) &= 0, & \Psi_x(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

- Viga **fixa-fixa**

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi(t, 0) &= 0 \\ W^0(t, L) &= 0, & \Psi(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

- Viga **fixa-livre**

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi(t, 0) &= 0 \\ EA \frac{\alpha^2}{2} (W_x^0)^3(L) + \kappa GA [W_x^0 - \Psi](L) &= 0, & \Psi_x(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

- Viga **livre-livre**

$$\begin{aligned} EA \frac{\alpha^2}{2} (W_x^0)^3(0) + \kappa GA [W_x^0 - \Psi](0) &= 0, & \Psi_x(t, 0) &= 0 \\ EA \frac{\alpha^2}{2} (W_x^0)^3(L) + \kappa GA [W_x^0 - \Psi](L) &= 0, & \Psi_x(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

- Viga **apoiada-livre**

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi_x(t, 0) &= 0 \\ EA \frac{\alpha^2}{2} (W_x^0)^3(L) + \kappa GA [W_x^0 - \Psi](L) &= 0, & \Psi_x(t, L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

### 2.5.1 As condições iniciais

Finalmente para completar a formulação do problema de valor inicial e de fronteira para o movimento da viga adicionamos as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} W^0(0, x) &= f_0(x) & \Psi(0, x) &= g_0(x) \\ \frac{\partial W^0}{\partial t}(0, x) &= f_1(x) & \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, x) &= g_1(x) \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde  $f_0(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $g_0(x)$  e  $g_1(x)$  são funções dadas.

A função  $f_0(x)$  é o deslocamento inicial da viga na direção horizontal na posição  $x$ . A função  $f_1(x)$  é a velocidade inicial da viga na direção horizontal na posição  $x$ . A função  $g_0(x)$  é o ângulo de rotação inicial na posição  $x$  e finalmente a função  $g_1(x)$  é a velocidade angular inicial na posição  $x$

Em este trabalho vamos supor que as funções  $f_0(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $g_0(x)$  e  $g_1(x)$  possam ser expressas em series de Fourier da forma

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sin i\pi x & g_0(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \sin j\pi x \\ f_1(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sin i\pi x & g_1(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \sin j\pi x \end{aligned} \tag{2.44}$$

### 3 FUNÇÃO DE ENERGIA PARA OS MODELOS DE TIMOSHENKO LINEAR E NÃO-LINEAR

Neste capítulo apresentamos o cálculo da energia para o sistema

$$\rho A W_{tt}^0 - \kappa G A (W_{xx}^0 - \Psi_x) + \alpha^2 \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right) W_{xx}^0 = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho I \Psi_{tt} - EI \Psi_{xx} - \kappa G A (W_x^0 - \Psi) = 0$$

e analisamos para quais condições de fronteira este sistema é conservativo. No caso linear  $\alpha = 0$  e no caso não linear  $\alpha = 1$ .

Para isso, introduzimos como variável o vetor

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} W^0(t, x) \\ \Psi(t, x) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

O sistema anterior pode escrever-se como uma equação diferencial de segunda ordem matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} + \alpha^2 \mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_{xx}) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa G A \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa G A \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa G A \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa G A \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right) W_{xx}^0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Introduzindo o produto interno

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_0^L \Psi^*(x) \Phi(x) dx, \quad \Psi^* = \overline{\Psi}^T, \quad (3.4)$$

segue da equação (3.3)

$$\langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{K}\mathbf{v} \rangle + \langle \dot{\mathbf{v}}, \alpha^2 \mathbf{N} \rangle = 0. \quad (3.5)$$

A seguir calculamos cada uma das expressões em (3.5)

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} \rangle &= \int_0^L \overline{\dot{\mathbf{v}}}^T \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} dx \\ &= \frac{\rho A}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (W_t^0)^2 dx + \frac{\rho I}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \Psi_t^2 dx \\ \langle \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{K}\mathbf{v} \rangle &= \int_0^L \overline{\dot{\mathbf{v}}}^T \mathbf{K}\mathbf{v} dx \\ &= \kappa GA \int_0^L (\Psi - W_x^0)(\Psi_t - W_{tx}^0) dx + EI \int_0^L \Psi_x \Psi_{xt} dx \\ &+ \kappa GA W_t^0 (\Psi - W_x^0)|_0^L - EI \Psi_t \Psi_x|_0^L \\ &= \frac{\kappa GA}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\Psi - W_x^0)^2 dx + \frac{EI}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \Psi_x^2 dx \\ &+ \kappa GA W_t^0 (\Psi - W_x^0)|_0^L - EI \Psi_t \Psi_x|_0^L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \dot{\mathbf{v}}, \alpha^2 \mathbf{N} \rangle &= \int_0^L \frac{L}{\dot{\mathbf{v}}} \alpha^2 \mathbf{N} dx \\
&= \alpha^2 \left[ \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right] \int_0^L W_{xx}^0 W_t^0 dx \\
&= \alpha^2 \left[ \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right] \left[ (W_x^0 W_t^0)|_0^L - \int_0^L W_x^0 W_{tx}^0 dx \right] \\
&= \alpha^2 \left[ \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right] \left[ (W_x^0 W_t^0)|_0^L - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right] \\
&= \alpha^2 \left[ \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right] (W_x^0 W_t^0)|_0^L + \frac{\alpha^2 L}{2AE} \frac{d}{dt} \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right)^2
\end{aligned}$$

Substituindo cada uma das expressões anteriores na equação (3.3), e denotando por  $|\cdot|$  a norma  $\mathbf{L}^2$  em  $[0, L]$ ,

$$|f(x)|^2 = \int_0^L f^2(x) dx \quad (3.6)$$

conseguimos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho A |W_t^0|^2 + \rho I |\Psi_t|^2 + \kappa G A |\Psi - W_x^0|^2 + EI |\Psi_x|^2 + \frac{\alpha^2 L}{AE} \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} |W_x^0|^2 \right)^2 \right\} \\
&= EI \Psi_t \Psi_x|_0^L - \kappa G A W_t^0 (\Psi - W_x^0)|_0^L - \alpha^2 \left[ \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} |W_x^0|^2 \right] (W_x^0 W_t^0)|_0^L
\end{aligned}$$

A parte direita da expressão anterior é zero nos seguintes casos

**Caso I: caso linear** ( $\alpha = 0$ ).

Quando temos as seguintes condições de fronteira: apoiada-livre, apoiada-apoiada, apoiada-fixa, fixa-livre, fixa-fixa e livre-livre

**Caso II: caso não linear** ( $\alpha = 1$ ).

Quando temos as condições de fronteira: apoiada-apoiada, fixa-apoiada, fixa-fixa.

Para ambos os casos, caso I e II, temos que a energia  $\mathbf{E}(t)$  é conservativa, isto é,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}(t) = 0 \quad (3.7)$$

onde

$$\mathbf{E}(t) = \rho A |W_t^0|^2 + \rho I |\Psi_t|^2 + \kappa A G |\Psi - W_x^0|^2 + EI |\Psi_x|^2 + \frac{\alpha^2 L}{AE} \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} |W_x^0|^2 \right)^2$$

## 4 MODOS NORMAIS PARA O MODELO LINEAR DE TIMOSHENKO

Na literatura ([32], [49]) o modelo de Timoshenko linear ( $\alpha = 0$  no sistema (2.35) )

$$\begin{aligned}\rho A W_{tt}^0 - \kappa G A (W_{xx}^0 - \Psi_x) &= 0 \\ \rho I \Psi_{tt} - E I \Psi_{xx} - \kappa G A (W_x^0 - \Psi) &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

é usualmente desacoplado em duas equações de quarta ordem do mesmo tipo. Além disso, para obter a equação de frequência e as autofunções ou modos associados é utilizada a formulação espectral. Esta última fundamenta-se no uso da base de soluções de Euler, chamada na literatura [11] como “base clássica”, cuja forma depende das raízes do polinômio característico associado com a equação de quarta ordem.

Neste trabalho vamos usar o método de Claeysen ([9], [11], [12], [13], [14], [15], [47]). Neste método as autofunções são escritas em termos de seus valores iniciais referentes a uma base dinâmica que é gerada por uma resposta matricial fundamental e permite abordar o problema sem a necessidade de desacoplá-lo. Com isto a dimensão do sistema algébrico linear que resulta das condições de contorno é quatro. Por outro lado, a não-singularidade de um dos coeficientes das condições de contorno, escritas na forma matricial, permite diminuir a dimensão do sistema para dois. Assim, o estudo espectral depende essencialmente do comportamento de uma solução característica associada à base dinâmica que aparece no sistema algébrico linear.



## 4.1 Equação Modal

Introduzindo como variável o vetor

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{bmatrix} W^0(t, x) \\ \Psi(t, x) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

O sistema dado pela equação (4.1) pode escrever-se como uma equação diferencial de segunda ordem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\kappa GA \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \\ -\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} & -EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa GA \end{bmatrix},$$

A procura de soluções exponenciais não nulas

$$\mathbf{v}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{w}(x), \quad \mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} W(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

do modelo de Timoshenko (4.3) equivale a determinar uma solução não nula  $\mathbf{w}(x)$  do sistema

$$(\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M})\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

sujeito a condições de contorno, as quais serão assumidas como sendo do tipo separado

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0} \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  denotam matrizes  $2 \times 2$ .

Diz que  $\mathbf{w}(x)$  é uma autofunção ou modo que corresponde ao autovalor  $\lambda$  sempre que esta for uma solução não trivial de (4.5) que satisfaz as condições de contorno (4.6). Quando  $\lambda = i\omega$  é um número puramente imaginário,  $\omega$  é chamado frequência natural da viga.

A obtenção dos modos equivale a determinar soluções não triviais da equação diferencial de segunda ordem com coeficientes matriciais,

$$\mathbb{M}\mathbf{w}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{w}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

que satisfazem as condições de contorno (4.6). Aqui

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} -\kappa GA & 0 \\ 0 & -EI \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa GA \\ -\kappa GA & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbb{K}(\lambda) = \lambda^2 \mathbb{M} + \mathbb{R} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2 \rho I + \kappa GA \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA \end{bmatrix}.$$

Para determinar os autovalores e autofunções, considere-se a solução de (4.7) na forma

$$\mathbf{w}(x) = \Phi_1(x)\mathbf{c}_1 + \Phi_2(x)\mathbf{c}_2 \quad (4.8)$$

onde  $\Phi_1, \Phi_2$  são matrizes  $2 \times 2$  que denotam uma base matricial para as soluções de (4.7), isto é, além de satisfazer a equação diferencial (4.7), a matriz wronskiana de ordem  $4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

possui posto 4 ou, equivalentemente, determinante não nulo. Aqui  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$  denotam vetores  $2 \times 1$ . Substituindo nas condições de contorno (4.6) reescritas a seguir,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0} \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

segue

$$\mathcal{A}[\Phi_1(0)\mathbf{c}_1 + \Phi_2(0)\mathbf{c}_2] + \mathcal{B}[\Phi_1'(0)\mathbf{c}_1 + \Phi_2'(0)\mathbf{c}_2] = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{C}[\Phi_1(L)\mathbf{c}_1 + \Phi_2(L)\mathbf{c}_2] + \mathcal{D}[\Phi_1'(L)\mathbf{c}_1 + \Phi_2'(L)\mathbf{c}_2] = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Matricialmente,

$$\mathcal{U}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma matriz  $4 \times 4$  com blocos de ordem  $2 \times 2$  e  $\mathbf{c}$  o vetor  $4 \times 1$  com linhas bloco de ordem  $2 \times 1$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}\Phi_1(0) + \mathcal{B}\Phi_1'(0) & \mathcal{A}\Phi_2(0) + \mathcal{B}\Phi_2'(0) \\ \mathcal{C}\Phi_1(L) + \mathcal{D}\Phi_1'(L) & \mathcal{C}\Phi_2(L) + \mathcal{D}\Phi_2'(L) \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}.$$

De maneira compacta

$$\mathcal{U} = \mathbb{B}\Phi \tag{4.14}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C} & \mathcal{B} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) \\ \Phi_1(L) & \Phi_2(L) \\ \Phi_1'(L) & \Phi_2'(L) \end{bmatrix}.$$

Para obter soluções não-nulas da equação (4.12) é necessário e suficiente que o determinante da matriz

$$\Delta = \det(\mathcal{U}) \tag{4.15}$$

seja nulo. A equação que resulta é chamada de *equação característica*.

## 4.2 Modos Normais

Usando o produto interno (3.4), isto é,

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_0^L \Psi^*(x)\Phi(x)dx, \quad \Psi^* = \overline{\Psi}^T$$

segue de (4.7),

$$\langle \mathbf{w}, \mathbb{M}\mathbf{w}'' \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbb{C}\mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbb{R}\mathbf{w} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{w}, \mathbb{M}\mathbf{w} \rangle = 0.$$

Integrando por partes, decorre

$$\lambda^2 \langle \mathbf{w}, \mathbb{M}\mathbf{w} \rangle = B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] + \int_0^L (\mathbf{w}^{*'}\mathbb{M})\mathbf{w}' + \mathbf{w}^{*'}\mathbb{C}\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\mathbb{R}\mathbf{w})dx,$$

onde

$$\begin{aligned} B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] &= -\mathbf{w}^* \mathbb{M} \mathbf{w}' - \mathbf{w}^* \mathbb{C} \mathbf{w} \Big|_0^L \\ &= \kappa G A \bar{W} (W' - \Psi) + \kappa G A W \bar{\Psi} + EI \bar{\Psi} \Psi' \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Substituindo valores, resulta

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] - \int_0^L [\kappa G A (|W'|^2 + |\Psi|^2 - \bar{W}' \Psi + W \bar{\Psi}') + EI |\Psi'|^2] dx}{\int_0^L (\rho A |W|^2 + \rho I |\Psi|^2) dx} \\ &= \frac{B[\mathbf{w}, \mathbf{w}] - \int_0^L [\kappa G A |W' - \Psi|^2 + EI |\Psi'|^2 + \kappa G A (W \bar{\Psi})'] dx}{\int_0^L (\rho A |W|^2 + \rho I |\Psi|^2) dx} \\ &= \frac{\kappa G A \bar{W} (W' - \Psi) + EI \bar{\Psi} \Psi' \Big|_0^L - \int_0^L [\kappa G A |W' - \Psi|^2 + EI |\Psi'|^2] dx}{\int_0^L (\rho A |W|^2 + \rho I |\Psi|^2) dx}. \end{aligned}$$

Aqui  $|z|$  denota valor absoluto do escalar  $z$  ( $z^2 = \bar{z}z$ ).

Para o modelo de Timoshenko (4.1) com as condições de contorno clássicas:

- apoiada,  $W = 0, \Psi' = 0$
- fixa,  $W = 0, \Psi = 0$
- livre,  $\Psi' = 0, W' - \Psi = 0$

tem-se que

$$\kappa G A \bar{W} (W' - \Psi) + EI \bar{\Psi} \Psi' \Big|_0^L = 0$$

Nesta situação, decorre que  $\lambda^2$  é o negativo do quociente de duas grandezas não negativas e portanto  $\lambda$  deve ser um número puramente imaginário. Assim a equação

(4.5) converte-se em

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w} = 0 \quad (4.16)$$

e as autofunções serão reais uma vez que  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  são matrizes reais.

Suponha-se que  $\mathbf{w}$ ,  $\Psi$  são autofunções correspondentes aos autovalores  $\lambda = i\omega$  e  $\lambda = i\gamma$ , respectivamente, ou seja

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{K} - \gamma^2 \mathbf{M}) \Psi = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Para as condições de contorno acima, sendo as autofunções e os coeficientes reais, verifica-se em [37] que

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \mathbf{K} \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{K} \Psi \rangle, \\ \langle \Psi, \mathbf{M} \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{M} \Psi \rangle, \end{aligned}$$

e decorre a ortogonalidade de Timoshenko

$$(\omega^2 - \gamma^2) \langle \Psi, \mathbf{M} \mathbf{w} \rangle = 0. \quad (4.18)$$

ou equivalentemente

$$\langle \Psi, \mathbf{M} \mathbf{w} \rangle = \int_0^L (\rho A \bar{u} w + \rho I \bar{\phi} \psi) dx = 0, \quad \text{onde} \quad \Psi = \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix}$$

Consequentemente, *as autofunções correspondentes a autovalores distintos são ortogonais com respeito a  $\mathbf{M}$* . Utilizando qualquer das equações em (4.17), o mesmo é válido para  $\mathbf{K}$ , isto é,

$$\langle \Psi, \mathbf{K} \mathbf{w} \rangle = 0.$$

## 5 EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA E MODOS DA VIGA DE TIMO-SHENKO LINEAR

Para a determinação das autofunções ou equivalentemente soluções para a equação (4.7), a base matricial pode ser escolhida como em Claeysen [7], [13], isto é, consideremos

$$\Phi_1 = \mathbf{h}(x), \quad \Phi_2 = \mathbf{h}'(x) \tag{5.1}$$

onde  $\mathbf{h}$  é a matriz  $2 \times 2$  que satisfaz a equação homogênea

$$\mathbb{M}\mathbf{h}''(x) + \mathbb{C}\mathbf{h}'(x) + \mathbb{K}(\lambda)\mathbf{h}(x) = \mathbf{0}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}. \tag{5.3}$$

Aqui  $\mathbf{0}$  denota a matriz nula  $2 \times 2$  e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade  $2 \times 2$ . Outra base pode ser,

$$\Phi_1 = \mathbf{h}_0(x), \quad \Phi_2 = \mathbf{h}_1(x) \tag{5.4}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= \mathbf{h}'(x)\mathbb{M} + \mathbf{h}(x)\mathbb{C} \\ \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}(x)\mathbb{M} \end{aligned} \tag{5.5}$$

satisfazem as condições iniciais normalizadas

$$\mathbf{h}_0(0) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{h}'_0(0) = \mathbf{0} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{h}_1(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'_1(0) = \mathbf{I}. \tag{5.7}$$

## 5.1 Cálculo de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Uma fórmula fechada para a matriz  $\mathbf{h}(x)$  tem sido estabelecida por Claeysen et al. em [15]. Para tanto, considere-se o polinômio característico

$$P(s) = \det[s^2\mathbb{M} + s\mathbb{C} + \mathbb{K}(\lambda)] = \sum_{k=0}^4 b_k s^{4-k},$$

onde para o modelo de Timoshenko (4.1) temos

$$b_0 = ab, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(ae + cb)\lambda^2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = (e\lambda^2 + a)c\lambda^2.$$

Aqui

$$a = \kappa GA, \quad b = EI, \quad c = \rho A, \quad e = \rho I.$$

Então, determina-se a solução  $d(x)$  do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 b_k d^{(4-k)}(x) &= b_0 d^{(iv)} + b_2 d'' + b_4 d = 0 \\ d(0) = d'(0) = d''(0) &= 0, \quad b_0 d'''(0) = 1, \end{aligned} \tag{5.8}$$

e calculam-se as matrizes  $\mathbf{h}_k$  a partir do problema de valor inicial da equação em diferenças matricial

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\mathbf{h}_{k+2} + \mathbb{C}\mathbf{h}_{k+1} + \mathbb{K}\mathbf{h}_k &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbb{M}\mathbf{h}_1 &= \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

A fórmula fechada é dada por

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{4-j} \tag{5.10}$$



Os cálculos seguem a seguir. Considere-se, em primeiro lugar, a equação diferencial característica

$$\begin{aligned} abd^{(iv)} - (ae + cb)\lambda^2 d'' + (e\lambda^2 + a)c\lambda^2 d &= 0 \\ d(0) = d'(0) = d''(0) = 0, abd'''(0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

O polinômio característico associado a esta equação diferencial pode ser convenientemente escrito como

$$P(s) = ab(s^4 + g^2 s^2 - r^4)$$

onde

$$g^2(\lambda) = -(e/b + c/a)\lambda^2, \quad r^4 = -c\lambda^2(e\lambda^2 + a)/ab.$$

As raízes do polinômio característico  $P(s)$  são  $s = \epsilon, -\epsilon, i\delta, -i\delta$ , onde

$$\epsilon = (1/2)\sqrt{-2g^2 + 2\sqrt{(g^4 + 4r^4)}}, \quad \delta = \sqrt{(g^2 + \epsilon^2)};$$

Assim

$$g^2 = \delta^2 - \epsilon^2, \quad r^4 = \delta^2 \epsilon^2. \quad (5.12)$$

Utilizando a base de Euler, segue que a solução do problema de valor inicial (5.11) é dada por

$$d(x) = \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (5.13)$$

De onde obtemos as seguintes expressões

$$d'(x) = \frac{\delta\epsilon \cosh(\epsilon x) - \delta\epsilon \cos(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (5.14)$$

$$d''(x) = \frac{\delta\epsilon^2 \sinh(\epsilon x) + \epsilon\delta^2 \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (5.15)$$

$$d'''(x) = \frac{\delta\epsilon^3 \cosh(\epsilon x) + \epsilon\delta^3 \cos(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (5.16)$$

$$d''''(x) = \frac{\delta\epsilon^4 \sinh(\epsilon x) - \epsilon\delta^4 \sin(\delta x)}{ab(\epsilon^2 + \delta^2)\epsilon\delta} \quad (5.17)$$

Por simples iteração, os seguintes valores matriciais de (5.9) são obtidos

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{a^2 - c\lambda^2 b}{a^2 b} & 0 \\ 0 & \frac{e\lambda^2}{b^2} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Assim, das relações (5.13)-(5.19), obtemos

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} bd''(x) - (e\lambda^2 + a)d(x) & ad'(x) \\ -ad'(x) & ad''(x) - d(x)c\lambda^2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{h}(x) = Ad(x) + Bd'(x) + Cd''(x) \quad (5.21)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -(e\lambda^2 + a) & 0 \\ 0 & -c\lambda^2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Facilmente também obtemos a derivada de  $\mathbf{h}(x)$

$$\mathbf{h}'(x) = Ad'(x) + Bd''(x) + Cd'''(x) \quad (5.22)$$

Com o uso da base

$$\Phi_1 = \mathbf{h}(x), \quad \Phi_2 = \mathbf{h}'(x)$$

a matriz definida em (4.14) simplifica-se e decorre que

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}\mathcal{M}^{-1} & (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C})\mathcal{M}^{-1} \\ \mathcal{C}\mathbf{h}(L) + \mathcal{D}\mathbf{h}'(L) & \mathcal{C}\mathbf{h}'(L) + \mathcal{D}\mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

## 5.2 Cálculo de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ na forma adimensional

Podemos calcular  $\mathbf{h}(x)$  na forma adimensional. Para isso, considere a adimensionalização sugerida por Huang em [32],

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, & b^2 &= \frac{\rho A}{EI} L^4 w^2, \\ s^2 &= \frac{EI}{\kappa G A L^2}, & r^2 &= \frac{I}{A L^2}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde  $b$  é um número proporcional às frequências de vibração,  $s^2$  é inversamente proporcional à rigidez de cisalhamento, e  $r^2$  é proporcional à inércia rotacional.

Utilizando (5.24), a equação matricial (4.7) na forma adimensional é dada por

$$\mathcal{M}\Phi''(\xi) + \mathcal{C}\Phi'(\xi) + \mathcal{K}\Phi(\xi) = 0, \quad (5.25)$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Ls^2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & -L \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} b^2s^2 & 0 \\ 0 & -L(1 - b^2r^2s^2) \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

**Teorema 5.1.** *A solução do problema de valor inicial matricial*

$$\mathcal{M}\mathbf{h}''(\xi) + \mathcal{C}\mathbf{h}'(\xi) + \mathcal{K}(b)\mathbf{h}(\xi) = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}'(0) = \mathbf{I} \quad (5.28)$$

onde  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  são conforme definidos em (5.26), é dada por

$$\mathbf{h}(\xi) = \begin{bmatrix} Ls^2 h''(\xi) - L(1 - b^2r^2s^2)h(\xi) & Lh'(\xi) \\ -h'(\xi) & h''(\xi) + b^2s^2h(\xi) \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

onde  $h(\xi)$  é a solução do problema de valor inicial

$$Ls^2 h^{(iv)}(\xi) + Lb^2s^2(r^2 + s^2)h''(\xi) - Lb^2s^2(1 - b^2r^2s^2)h(\xi) = 0, \quad (5.30)$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad Ls^2 h'''(0) = 1. \quad (5.31)$$

*Demonstração.* Seguindo o processo da seção anterior, tem-se

$$\begin{aligned} P(s) &= \det [s^2\mathcal{M} + s\mathcal{C} + \mathcal{K}] \\ &= Ls^2\lambda^4 + Ls^2b^2(r^2 + s^2)\lambda^2 - Ls^2b^2(1 - b^2r^2s^2), \end{aligned} \quad (5.32)$$

$h(\xi)$  é a solução do problema de valor inicial escalar construído a partir do polinômio  $P(s)$ , ou seja

$$Ls^2 h^{(iv)}(\xi) + Lb^2 s^2 (r^2 + s^2) h''(\xi) - Lb^2 s^2 (1 - b^2 r^2 s^2) h(\xi) = 0,$$

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = 0, \quad Ls^2 h'''(0) = 1.$$

e a matriz  $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}^{(j)}(0)$  satisfaz o problema de valor inicial discreto

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{h}_{j+2} + \mathcal{C}\mathbf{h}_{j+1} + \mathcal{K}(b)\mathbf{h}_j &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_0 &= \mathbf{0}, \quad \mathcal{M}\mathbf{h}_1 = \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Por recursão de (5.33), tem-se  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{h}_1 = \mathcal{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{h}_2 = -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C}\mathcal{M}^{-1}$  e  $\mathbf{h}_3 = \mathcal{M}^{-1}[(\mathcal{C}\mathcal{M}^{-1})^2 - \mathcal{K}\mathcal{M}^{-1}]$ . O resultado segue pela substituição destes últimos em (5.10).  $\square$

**Corolário 5.1.** *Tem-se*

$$\mathbf{h}_0(\xi) = \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}(\xi)\mathcal{C} = \begin{bmatrix} Ls^2(h'''(\xi) + b^2 r^2 h'(\xi)) & L^2(1 - b^2 r^2 s^2) h(\xi) \\ b^2 s^2 h(\xi) & L s^2 h'''(\xi) + L(b^2 s^4 + 1)h'(\xi) \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

$$\mathbf{h}'_0(\xi) = \mathbf{h}''(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{C} = -\mathbf{h}(\xi)\mathcal{K} \tag{5.35}$$

$$\mathbf{h}'_1(\xi) = \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{M}. \tag{5.36}$$

e

$$\mathbf{h}_1(\xi) = \mathbf{h}(\xi)\mathcal{M} = \begin{bmatrix} L s^2 h''(\xi) - L(1 - b^2 r^2 s^2)h(\xi) & L^2 s^2 h'(\xi) \\ -h'(\xi) & L s^2 (h''(\xi) + s^2 h(\xi)) \end{bmatrix}. \tag{5.37}$$

*Demonstração.* Segue por simples substituição. Para a segunda relação, usa-se o fato que  $\mathbf{h}(\xi)$  é solução à direita e à esquerda da equação matricial (5.27), isto é,

$$\mathcal{M}\mathbf{h}''(\xi) + \mathcal{C}\mathbf{h}'(\xi) + \mathcal{K}\mathbf{h}(\xi) = \mathbf{h}''(\xi)\mathcal{M} + \mathbf{h}'(\xi)\mathcal{C} + \mathbf{h}(\xi)\mathcal{K} = 0.$$

□

### 5.3 Viga Apoiada-Apoiada

Relembramos que as condições de contorno para uma viga apoiada-apoiada estão dadas por:

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) = 0, & \quad \Psi_x(t, 0) = 0, \\ W^0(t, L) = 0, & \quad \Psi_x(t, L) = 0, \end{aligned} \tag{5.38}$$

que na forma matricial podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.39}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com estas matrizes o sistema de equações (4.12) com  $\mathcal{U}$  dado por (5.23) simplifica-se na forma

$$D\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{5.40}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L) & ad'''(L) \\ -ad''(L) & ad''''(L) - c\lambda^2 d''(L) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

e

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Do sistema (5.40) temos que a equação característica esta dada por

$$[bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L)] [ad''''(L) - c\lambda^2 d''(L)] + a^2(d''(L))^2 = 0$$

ou equivalentemente e usando a equação de (5.11) chega-se a seguinte expressão

$$[d''(L)]^2 - d(L)d''''(L) = 0 \quad (5.43)$$

Também do sistema (5.40) obtemos as auto-funções

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x) \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{h}'(x) \begin{bmatrix} 0 \\ c_{22} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

onde  $\mathbf{h}(x)$  esta dada por (5.20) e as constantes  $c_{11}$  e  $c_{22}$  satisfazem a seguinte relação

$$[bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L)] c_{11} + ad''(L)c_{22} = 0 \quad (5.45)$$

Em particular no caso em que  $c_{22} = 1$  obtemos de (5.44)

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} a(a + e\lambda^2) \frac{d''(L)d(x) - d''(x)d(L)}{bd''(L) - (a + e\lambda^2)d(L)} \\ \frac{a^2 d'(x)d''(L) + [c\lambda^2 d'(x) - ad''''(x)] [d(L)(a + e\lambda^2) - bd''(L)]}{bd''(L) - (a + e\lambda^2)d(L)} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Desde que o problema de contorno so admite frequências naturais  $\lambda = i\omega, -i\omega$  com  $\omega$  um número real não negativo e considerando a base de Euler temos que a equação característica (5.43) fica como

$$(\delta^2 + \epsilon^2)^2 \sinh(\epsilon L) \sin(\delta L) = 0 \quad (5.47)$$

de onde obtemos

$$\sin(\delta L) = 0 \quad (5.48)$$

pois  $\epsilon L \neq 0$ .

As autofunções (5.44) estão dadas por

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \frac{(e\omega^2 - a)}{(b\epsilon^2 + e\omega^2 - a)\delta b} \sin \delta x \\ \frac{1}{b} \cos \delta x \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

## 5.4 Viga Apoiada-Apoiada com h adimensional

Neste caso as condições de contorno adimensionais são dadas por:

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) = 0, & \quad \Psi_\xi(t, 0) = 0, \\ W^0(t, 1) = 0, & \quad \Psi_\xi(t, 1) = 0, \end{aligned} \quad (5.50)$$

que na forma matricial podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(1) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(1) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.51)$$



onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com estas matrizes o sistema de equações (4.12) com  $\mathcal{U}$  dado por (5.23) simplifica-se

$$D\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{5.52}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} Ls^2d''(1) - L(1 - b^2r^2s^2)d(1) & Ld''(1) \\ -d''(1) & d''''(1) + b^2s^2d''(1) \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

e

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{22} \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Do sistema (5.52) temos que a equação característica esta dada por

$$[Ls^2d''(1) - L(1 - b^2r^2s^2)d(1)] [d''''(1) + b^2s^2d''(1)] + L(d''(1))^2 = 0$$

ou de forma equivalentemente e usando a equação (5.30) decorre

$$[d''(1)]^2 - d(1)d''''(1) = 0 \tag{5.55}$$

Também do sistema (5.52) obtemos as auto-funções

$$\mathbf{w}(\xi) = \mathbf{h}(\xi) \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{h}'(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ c_{22} \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

onde  $\mathbf{h}(\xi)$  esta dada por (5.29) e as constantes  $c_{11}$  e  $c_{22}$  satisfazem a seguinte relação

$$[Ls^2d''(1) - L(1 - b^2r^2s^2)d(1)]c_{11} + Ld''(1)c_{22} = 0 \quad (5.57)$$

Em particular no caso em que  $c_{22} = 1$  obtemos de (5.56)

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{bmatrix} c_{11} [Ls^2d''(\xi) - L(1 - b^2r^2s^2)d(\xi)] + Ld''(\xi) \\ -c_{11}d'(\xi) + d'''(\xi) + b^2s^2d'(\xi) \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Da mesma forma como feito com a viga apoiada-apoiada não adimensional, utilizando a base de Euler a equação característica (5.55) pode ser reescrita como

$$(\delta^2 + \epsilon^2)^2 \sinh(\epsilon) \sin(\delta) = 0 \quad (5.59)$$

de onde obtemos

$$\sin(\delta) = 0 \quad (5.60)$$

pois  $\epsilon \neq 0$ .

Também, e depois de cálculos algébricos, obtemos

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{-(1 - b^2r^2s^2)}{[s^2\epsilon^2 - (1 - b^2r^2s^2)]s^2\delta} \sin \delta\xi \\ \frac{1}{Ls^2} \cos \delta\xi \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

## 5.5 Viga Fixa-Apoiada

Para este caso as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi(t, 0) &= 0, \\ W^0(t, L) &= 0, & \Psi_x(t, L) &= 0, \end{aligned} \quad (5.62)$$

que na forma matricial podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Introduzindo estas matrizes no sistema de equações (4.12) com  $\mathcal{U}$  dado por (5.23) encontramos a seguinte equação

$$D\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (5.64)$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} bd'''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L) & ad'(L) \\ -ad''(L) & ad'''(L) - c\lambda^2 d'(L) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

e

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Segue da expressão (5.64) que a equação característica esta dada por

$$[bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L)] [ad'''(L) - c\lambda^2 d'(L)] + ad''(L)d'(L) = 0 \quad (5.67)$$

Também do sistema (5.64) obtemos as autofunções

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x) \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

onde  $\mathbf{h}(x)$  esta dada por (5.20) e as constantes  $c_{11}$  e  $c_{12}$  satisfazem a seguinte relação

$$[bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L)] c_{11} + ad'(L)c_{12} = 0 \quad (5.69)$$

Em particular no caso em que  $c_{12} = 1$  obtemos

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \frac{a(a + e\lambda^2)[d'(L)d(x) - d'(x)d(L)] + ab[d'(x)d''(L) - d'(L)d''(x)]}{bd''(L) - (a + e\lambda^2)d(L)} \\ d'(x) \frac{c\lambda^2 d'(L) - ad'''(L)}{d''(L)} + ad''(x) - c\lambda^2 d(x) \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Por outro lado desde que o problema de fronteira so admite frequências naturais  $\lambda = i\omega, -i\omega$  com  $\omega$  um número real não negativo e considerando a base de Euler temos que a equação característica fica como

$$\delta [b\epsilon^2 + e\omega^2 - a] \tanh(\epsilon L) + \epsilon [b\delta^2 - (e\omega^2 - a)] \tan(\delta L) = 0 \quad (5.71)$$

e as autofunções estão dadas por

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} W(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

onde

$$W(x) = -\frac{1}{b(\epsilon^2 + \delta^2)} \coth(\epsilon L) \sinh(\epsilon x) + \frac{1}{b(\epsilon^2 + \delta^2)} \cot(\delta L) \sin(\delta x) \\ - \frac{1}{b(\epsilon^2 + \delta^2)} \cosh(\epsilon x) - \frac{1}{b(\epsilon^2 + \delta^2)} \cos(\delta x)$$

e a função  $\Psi(x)$  esta dada por

$$\Psi(x) = \frac{(a\epsilon^2 + c\omega^2)}{a\epsilon b(\epsilon^2 + \delta^2)} \sinh(\epsilon x) + \frac{a\delta^2 - c\omega^2}{a\delta b(\epsilon^2 + \delta^2)} \sin(\delta x) \\ - \frac{a\epsilon \coth(\epsilon L)}{b(\epsilon^2 + \delta^2)[b\epsilon^2 + e\omega^2 - a]} \cosh(\epsilon x) + \frac{a\delta \cot(\delta L)}{b(\epsilon^2 + \delta^2)[b\delta^2 - (e\omega^2 - a)]} \cos(\delta x)$$

Aqui usamos o fato que a seguinte expressão denotada por  $S$

$$S = \frac{d'(L)}{bd''(L) + (e\omega^2 - a)d(L)}$$

pode expressar-se como

$$S = \frac{\delta\epsilon \cosh(\epsilon L) - \epsilon\delta \cos(\delta L)}{\delta[\epsilon^2 b + (e\omega^2 - a)] \sinh(\epsilon L) + \epsilon[\delta^2 b - (e\omega^2 - a)] \sin(\delta L)}$$

e usando a equação característica

$$\delta[\epsilon^2 b + e\omega^2 - a] \sinh(\epsilon L) = \frac{-\epsilon[\delta^2 b - (e\omega^2 - a)] \sin(\delta L) \cosh(\epsilon L)}{\cos(\delta L)}$$

obtemos as seguintes expressões para  $S$

$$S = \frac{-\delta\epsilon \cos(\delta L)}{\epsilon[\delta^2 b - (e\omega^2 - a)] \sin(\delta L)} \\ = \frac{-\delta \cot(\delta L)}{[\delta^2 b - (e\omega^2 - a)]}$$

ou

$$\begin{aligned} S &= \frac{\delta \epsilon \cosh(\epsilon L)}{\delta[\epsilon^2 b + (e\omega^2 - a)] \sinh(\epsilon L)} \\ &= \frac{\epsilon \coth(\epsilon L)}{[b\epsilon^2 + (e\omega^2 - a)]} \end{aligned}$$

Estas expressões para  $S$  são usadas para obter as autofunções em (5.72)

## 5.6 Viga Fixa-Fixa

Para este caso lembramos que as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} W^0(t, 0) &= 0, & \Psi(t, 0) &= 0, \\ W^0(t, L) &= 0, & \Psi(t, L) &= 0, \end{aligned} \tag{5.73}$$

e que reescritas na forma matricial ganham a forma seguinte

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}(0) + \mathcal{B}\mathbf{w}'(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{C}\mathbf{w}(L) + \mathcal{D}\mathbf{w}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.74}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com estas matrizes o sistema de equações (4.12) com  $\mathcal{U}$  dado por (5.23) simplifica-se

$$D\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{5.75}$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L) & ad'(L) \\ -ad'(L) & ad''(L) - c\lambda^2 d(L) \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

e

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

De (5.75) temos que a equação característica esta dada por

$$[bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L)] [ad''(L) - c\lambda^2 d(L)] + a^2[d'(L)]^2 = 0 \quad (5.78)$$

Também do sistema (5.75) obtemos as auto-funções

$$\mathbf{w}(x) = \mathbf{h}(x) \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

onde  $\mathbf{h}(x)$  esta dada por (5.20) e as constantes  $c_{11}$  e  $c_{12}$  satisfazem a seguinte relação

$$[bd''(L) - (e\lambda^2 + a)d(L)] c_{11} + ad'(L)c_{12} = 0 \quad (5.80)$$

Em particular no caso em que  $c_{12} = 1$  obtemos

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \frac{a(a + e\lambda^2)[d'(L)d(x) - d'(x)d(L)] + ab[d'(x)d''(L) - d'(L)d''(x)]}{bd''(L) - (a + e\lambda^2)d(L)} \\ d'(x) \frac{c\lambda^2 d(L) - ad''(L)}{d'(L)} + ad''(x) - c\lambda^2 d(x) \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Desde que o problema de fronteira so admite frequências naturais  $\lambda = i\omega, -i\omega$  com  $\omega$  um numero real não negativo e considerando a base de Euler temos que a equação característica fica como

$$2 - 2 \cosh(\epsilon L) \cos(\delta L) + \frac{[b(\epsilon^2 + \delta^2)^2 + a(\epsilon^2 - \delta^2)]}{a\epsilon\delta} \sinh(\epsilon L) \sin(\delta L) = 0 \quad (5.82)$$

e as autofunções estão dadas por

$$\mathbf{w}(x) = \Lambda \begin{bmatrix} W(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

onde

$$W(x) = \Upsilon\Gamma \sinh(\epsilon x) + \Gamma \sin(\delta x) + \cosh(\epsilon x) - \cos(\delta x)$$

e

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \frac{(a\epsilon^2 + c\omega^2)}{a\epsilon} \sinh(\epsilon x) + \frac{(a\delta^2 - c\omega^2)}{a\delta} \sin(\delta x) \\ & - \frac{a\delta\Gamma}{[b\delta^2 - (e\omega^2 - a)]} \cosh(\epsilon x) + \frac{a\delta\Gamma}{[b\delta^2 - (e\omega^2 - a)]} \cos(\delta x) \end{aligned}$$

onde as constantes  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  e  $\Upsilon$  estão dadas pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{b(\epsilon^2 + \delta^2)} \\ \Gamma &= \frac{-\cosh(\epsilon L) + \cos(\delta L)}{\sinh(\epsilon L) + \sin(\delta L)} \\ \Upsilon &= \frac{\delta[\epsilon^2 b + e\omega^2 - a]}{\epsilon[\delta^2 b - (e\omega^2 - a)]} \end{aligned} \quad (5.84)$$



## 6 O MÉTODO ESPECTRAL DE GALERKIN PARA O MODELO NÃO-LINEAR DE TIMOSHENKO

O método de Galerkin [53] procura soluções do sistema

$$\rho A W_{tt}^0 - \kappa G A (W_{xx}^0 - \Psi_x) + \alpha^2 \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L (W_x^0)^2 dx \right) W_{xx}^0 = 0 \quad (6.1)$$

$$\rho I \Psi_{tt} - EI \Psi_{xx} - \kappa G A (W_x^0 - \Psi) = 0$$

na forma

$$W^0(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(t) S_i(x) \quad (6.2)$$

$$\Psi(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(t) C_i(x)$$

onde as amplitudes  $W_i(t)$ ,  $\Psi_i(t)$  devem ser determinadas e as funções  $S_i(x)$  e  $C_i(x)$  são as autofunções do sistema linear ( $\alpha = 0$  em o sistema (6.1))

$$\rho A W_{tt}^0 - \kappa G A (W_{xx}^0 - \Psi_x) = 0 \quad (6.3)$$

$$\rho I \Psi_{tt} - EI \Psi_{xx} - \kappa G A (W_x^0 - \Psi) = 0$$

sujeito a condições de contorno clássicas, isto é, condições tipo apoiada-livre, apoiada-apoiada, apoiada-fixa, fixa-livre, fixa-fixa e livre-livre (ver o capítulo 4).

## 6.1 Formulação matricial

Em forma matricial as expressões em (6.2) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} W^0(t, x) &= \mathbf{F}^T(t)\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}^T(x)\mathbf{F}(t) \\ \Psi(t, x) &= \mathbf{G}^T(t)\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}^T(x)\mathbf{G}(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde

$$\mathbf{F}^T(t) = [W_1(t) \quad W_2(t) \quad W_3(t) \quad \dots] \quad , \quad \mathbf{S}(x) = \begin{bmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \\ S_3(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

e

$$\mathbf{G}^T(t) = [\Psi_1(t) \quad \Psi_2(t) \quad \Psi_3(t) \quad \dots] \quad , \quad \mathbf{C}(x) = \begin{bmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ C_3(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

De (6.4), obtemos para  $W(t, x)$  as seguintes expressões

$$W_{tt}^0(t, x) = \ddot{\mathbf{F}}^T(t)\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}^T(x)\ddot{\mathbf{F}}(t) \quad (6.7)$$

$$W_x^0(t, x) = \mathbf{F}^T(t)\mathbf{S}'(x) = \mathbf{S}'^T(x)\mathbf{F}(t) \quad (6.8)$$

$$[W_x^0(t, x)]^2 = (\mathbf{F}^T(t)\mathbf{S}'(x))^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{S}'\mathbf{F}^T\mathbf{S}' = \mathbf{F}^T\mathbf{S}'\mathbf{S}'^T\mathbf{F} \quad (6.9)$$

$$W_{xx}^0(t, x) = \mathbf{F}^T(t)\mathbf{S}''(x) = \mathbf{S}''^T(x)\mathbf{F}(t) \quad (6.10)$$

e para a função  $\Psi(t, x)$  as expressões

$$\Psi_{tt}(t, x) = \ddot{\mathbf{G}}^T(t)\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}^T(x)\ddot{\mathbf{G}}(t) \quad (6.11)$$

$$\Psi_x(t, x) = \mathbf{G}^T(t)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{C}'^T(x)\mathbf{G}(t) \quad (6.12)$$

$$\Psi_{xx}(t, x) = \mathbf{G}^T(t)\mathbf{C}''(x) = \mathbf{C}''^T(x)\mathbf{G}(t) \quad (6.13)$$

Substituindo-se as igualdades (6.7)-(6.13) em (6.1), obtemos, então, o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \rho A \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{F}} - \kappa G A (\mathbf{S}''^T \mathbf{F} - \mathbf{C}'^T \mathbf{G}) + \alpha^2 \left( \frac{2CEA}{L} - \frac{AE}{2L} \int_0^L \mathbf{F}^T \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T \mathbf{F} dx \right) \mathbf{S}''^T \mathbf{F} = 0 \\ \rho I \mathbf{C}^T \ddot{\mathbf{G}} - E I \mathbf{C}''^T \mathbf{G} - \kappa G A (\mathbf{S}'^T \mathbf{F} - \mathbf{C}^T \mathbf{G}) = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

## 6.2 Caso Sincronizado

O sistema anterior (6.14) pode ser simplificado supondo a natureza sincronizada do movimento do deslocamento transversal  $W^0(t, x)$  e a orientação  $\Psi(t, x)$ , isto é,

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{G}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (6.15)$$

Nesta situação, a procura de soluções na forma (6.2) adota matematicamente uma generalização do método de Galerkin para sistemas

$$\mathbf{U}(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) \mathbf{U}_i(x) \quad (6.16)$$

onde

$$\mathbf{U}_i(x) = \begin{bmatrix} S_i(x) \\ C_i(x) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

são funções que satisfazem as condições de contorno do problema ([20],[35], [30]).

Então, com o uso do método espectral de Galerkin (6.16), de (6.14) resulta

$$\rho A \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{P}} - \kappa G A (\mathbf{S}''^T - \mathbf{C}'^T) \mathbf{P} = \alpha^2 \left( \frac{-2CEA}{L} + \frac{AE}{2L} \int_0^L \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T \mathbf{P} dx \right) \mathbf{S}''^T \mathbf{P} \quad (6.18)$$

$$\rho I \mathbf{C}^T \ddot{\mathbf{P}} - E I \mathbf{C}''^T \mathbf{P} - \kappa G A (\mathbf{S}'^T - \mathbf{C}^T) \mathbf{P} = 0$$

Mas como (ver equação 4.16)

$$-\kappa G A (\mathbf{S}''^T - \mathbf{C}'^T) = \rho A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (6.19)$$

$$-E I \mathbf{C}''^T - \kappa G A (\mathbf{S}'^T - \mathbf{C}^T) = \rho I \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Omega}^2$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

o sistema (6.18) pode ser reescrito como

$$\rho A \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{P}} + \rho A \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{P} = \alpha^2 \left( -\frac{2CEA}{L} + \frac{AE}{2L} \int_0^L \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T \mathbf{P} dx \right) \mathbf{S}''^T \mathbf{P} \quad (6.21)$$

$$\rho I \mathbf{C}^T \ddot{\mathbf{P}} + \rho I \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{P} = 0$$

Agora, multiplicando a primeira e segunda equação de (6.21) pelos vectores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{C}$  respectivamente, decorre

$$\rho A \mathbf{S} \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{P}} + \rho A \mathbf{S} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{P} = \alpha^2 \left( -\frac{2CEA}{L} + \frac{AE}{2L} \int_0^L \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T \mathbf{P} dx \right) \mathbf{S} \mathbf{S}''^T \mathbf{P} \quad (6.22)$$

$$\rho I \mathbf{C} \mathbf{C}^T \ddot{\mathbf{P}} + \rho I \mathbf{C} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{P} = 0$$

e, daí, depois de integrar de 0 a  $L$  e somar as equações em (6.22), obtemos

$$\left[ \rho A \int_0^L \mathbf{S} \mathbf{S}^T dx + \rho I \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{C}^T dx \right] (\ddot{\mathbf{P}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{P}) = \alpha^2 N, \quad (6.23)$$

onde

$$N = \left( -\frac{2CEA}{L} + \frac{AE}{2L} \int_0^L \mathbf{P}^T \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T \mathbf{P} dx \right) \int_0^L \mathbf{S} \mathbf{S}''^T \mathbf{P} dx \quad (6.24)$$

ou equivalentemente o sistema não linear desacoplado para a amplitude  $\mathbf{P}(t)$

$$\ddot{\mathbf{P}}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{P}(t) = \alpha^2 \mathfrak{M}^{-1} N, \quad (6.25)$$

onde

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

e cada componente  $d_i$  da matriz  $\mathfrak{M}$  esta dado pelo produto de Timoshenko (4.18)

$$d_i = \rho A \int_0^L S_i^2 dx + \rho I \int_0^L C_i^2 dx. \quad (6.27)$$

### 6.3 O caso da viga Apoiada-Apoiada

Para o caso da viga apoiada-apoiada e visando um estudo da existência e unicidade da solução para este caso, consideremos  $\alpha = 1$  e assumamos por simplicidade  $L = 1$ . Assim, temos as seguintes amplitudes e autofunções

$$\mathbf{F}^T(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) & W_2(t) & W_3(t) & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(x) = \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \\ \sin(2\pi x) \\ \sin(3\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{G}^T(t) = \begin{bmatrix} \Psi_0(t) & \Psi_1(t) & \Psi_2(t) & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\pi x) \\ \cos(2\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

e as expressões dadas em (6.7)-(6.13) ficam as mesmas, obtendo então o sistema

$$\begin{aligned} \rho A \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{F}} - \kappa G A (\mathbf{S}''^T \mathbf{F} - \mathbf{C}^T \mathbf{G}) + \left( 2CEA - \frac{AE}{2} \int_0^1 \mathbf{F}^T \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T \mathbf{F} dx \right) \mathbf{S}''^T \mathbf{F} &= 0 \\ \rho I \mathbf{C}^T \ddot{\mathbf{G}} - E I \mathbf{C}''^T \mathbf{G} - \kappa G A (\mathbf{S}'^T \mathbf{F} - \mathbf{C}^T \mathbf{G}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Através de algumas propriedades das autofunções  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{C}$  o sistema acima (6.30) pode ser simplificado. Para isso definimos as seguintes matrizes infinitas (ver [40])

**Definição 6.1.**

$$\mathbf{K} = \pi \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \pi \text{diag} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Da definição anterior (6.1), temos para as autofunções dadas em (6.28) e (6.29) as seguintes relações

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{S}'(x) &= \begin{bmatrix} \pi \cos(\pi x) \\ 2\pi \cos(2\pi x) \\ 3\pi \cos(3\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\pi x) \\ \cos(2\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{C}(x) \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\bullet \quad \mathbf{S}''(x) = - \begin{bmatrix} \pi^2 \sin(\pi x) \\ (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \\ (3\pi)^2 \sin(3\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$= -\pi^2 \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \\ \sin(2\pi x) \\ \sin(3\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} = -\mathbf{K}^2 \mathbf{S}(x)$$

$$\bullet \quad \mathbf{C}'(x) = - \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \sin(\pi x) \\ 2\pi \sin(2\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= -\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\pi x) \\ \sin(2\pi x) \\ \sin(3\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

$$= -\mathbf{LUS}(x)$$



$$\bullet \quad \mathbf{C}''(x) = - \begin{bmatrix} 0 \\ \pi^2 \cos(\pi x) \\ (2\pi)^2 \cos(2\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$= -\pi^2 \begin{bmatrix} 0^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(\pi x) \\ \cos(2\pi x) \\ \vdots \end{bmatrix} = -\mathbf{L}^2 \mathbf{C}(x)$$

$$\bullet \quad \int_0^1 \mathbf{S}' \mathbf{S}'^T dx = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{(2\pi)^2}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{(3\pi)^2}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{K}^2$$

De (6.33)-(6.36) obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'^T(x) &= \mathbf{C}^T(x) \mathbf{L} \mathbf{U} \\ \mathbf{S}''^T(x) &= -\mathbf{S}'^T(x) \mathbf{K}^2 \\ \mathbf{C}'^T(x) &= -\mathbf{S}'^T(x) \mathbf{U}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{C}''^T(x) &= -\mathbf{C}'^T(x) \mathbf{L}^2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Substituindo-se as expressões acima (6.37) e (6.38) no sistema (6.30), obtemos

$$\rho A \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{F}} + \left( \kappa G A - 2 C E A + \frac{A E}{4} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^2 \mathbf{F} \right) \mathbf{S}^T \mathbf{K}^2 \mathbf{F} - \kappa G A \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{G} = 0 \quad (6.39)$$

$$\rho I \mathbf{C}^T \ddot{\mathbf{G}} + E I \mathbf{C}^T \mathbf{L}^2 \mathbf{G} + \kappa G A \mathbf{C}^T (\mathbf{G} - \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{F}) = 0$$

Multiplicando por  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{C}$  a primeira e segunda equação respectivamente do sistema (6.39) e depois de integrar de 0 à 1 decorre que

$$\rho A \ddot{\mathbf{F}} + \left( \kappa G A - 2 C E A + \frac{A E}{4} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^2 \mathbf{F} \right) \mathbf{K}^2 \mathbf{F} - \kappa G A \mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{G} = 0 \quad (6.40)$$

$$\rho I \ddot{\mathbf{G}} + E I \mathbf{L}^2 \mathbf{G} + \kappa G A (\mathbf{G} - \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{F}) = 0$$

logo, introduz-se as seguintes variáveis adimensionais

$$\tilde{t} \equiv \left( \frac{E I}{\rho A} \right)^{1/2} t$$

$$\mathbf{F}(\tilde{t}) \equiv \mathbf{F}(t) \quad (6.41)$$

$$\mathbf{G}(\tilde{t}) \equiv \mathbf{G}(t)$$

De (6.41) chegamos às seguintes relações

$$\ddot{\mathbf{F}}(t) = \frac{E I}{\rho A} \ddot{\mathbf{F}}(\tilde{t})$$

$$\ddot{\mathbf{G}}(t) = \frac{E I}{\rho A} \ddot{\mathbf{G}}(\tilde{t}) \quad (6.42)$$

Assim, substituindo (6.42) nas equações (6.40), obtemos:

$$\ddot{\mathbf{F}}(\tilde{t}) + \left( \frac{A \kappa G}{I E} - \frac{2CA}{I} + \frac{1}{22I} \mathbf{F}^T(\tilde{t}) \mathbf{K}^2 \mathbf{F}(\tilde{t}) \right) \mathbf{K}^2 \mathbf{F}(\tilde{t}) - \frac{A \kappa G}{I E} \mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{G}(\tilde{t}) = 0 \quad (6.43)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{t}) + \frac{A}{I} \mathbf{L}^2 \mathbf{G}(\tilde{t}) + \frac{A^2 \kappa G}{I^2 E} (\mathbf{G}(\tilde{t}) - \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{F}(\tilde{t})) = 0$$

### 6.3.1 O sistema infinito

Definindo os parâmetros adimensionais,

$$a = \frac{2CA}{I}, \quad b = \frac{A}{2I}, \quad c = \frac{A}{I}, \quad d = \frac{\kappa G}{E}$$

obtemos finalmente de (6.43) o sistema infinito adimensional

$$\ddot{\mathbf{F}}(\tilde{t}) + \left( cd - a + \frac{b}{2} \mathbf{F}^T(\tilde{t}) \mathbf{K}^2 \mathbf{F}(\tilde{t}) \right) \mathbf{K}^2 \mathbf{F}(\tilde{t}) - cd \mathbf{U}^T \mathbf{L} \mathbf{G}(\tilde{t}) = 0 \quad (6.44)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{t}) + c \mathbf{L}^2 \mathbf{G}(\tilde{t}) + c^2 d (\mathbf{G}(\tilde{t}) - \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{F}(\tilde{t})) = 0$$

com as seguintes condições iniciais

$$\mathbf{F}(0) = \bar{\alpha} \quad \mathbf{G}(0) = \bar{\gamma} \quad (6.45)$$

$$\dot{\mathbf{F}}(0) = \bar{\beta} \quad \dot{\mathbf{G}}(0) = \bar{\delta} \quad (6.46)$$

onde

$$\mathbf{F}(0) = \begin{bmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \\ W_3(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} \Psi_0(0) \\ \Psi_1(0) \\ \Psi_2(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

e

$$\dot{\mathbf{F}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{W}_1(0) \\ \dot{W}_2(0) \\ \dot{W}_3(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{G}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_0(0) \\ \dot{\Psi}_1(0) \\ \dot{\Psi}_2(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Equivalentemente, podemos escrever o sistema (6.44) como

$$\ddot{W}_i + \left( cd - a + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \right) \pi^2 i^2 W_i - cd\pi i \Psi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

$$\ddot{\Psi}_j + c\pi^2 j^2 \Psi_j + c^2 d(\Psi_j - \pi j W_j) = 0 \quad j = 0, 1, \dots$$

com condições iniciais :

$$W_i(0) = \alpha_i \quad \Psi_j(0) = \gamma_j \quad (6.50)$$

$$\dot{W}_i(0) = \beta_i \quad \dot{\Psi}_j(0) = \delta_j \quad (6.51)$$

onde  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, \dots$

### 6.3.2 O sistema finito

Considerando

$$\mathbf{F}_n(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \vdots \\ W_n(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_n(t) = \begin{bmatrix} \Psi_0(t) \\ \Psi_1(t) \\ \vdots \\ \Psi_n(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

obtemos de (6.44) o sistema finito

$$\ddot{\mathbf{F}}_n(\tilde{t}) + \left( cd - a + \frac{b}{2} \mathbf{F}_n^T(\tilde{t}) \mathbf{K}_n^2 \mathbf{F}_n(\tilde{t}) \right) \mathbf{K}_n^2 \mathbf{F}_n(\tilde{t}) - cd \mathbf{U}_n^T \mathbf{L}_n \mathbf{G}_n(\tilde{t}) = 0 \quad (6.52)$$

$$\ddot{\mathbf{G}}_n(\tilde{t}) + c \mathbf{L}_n^2 \mathbf{G}_n(\tilde{t}) + c^2 d (\mathbf{G}_n(\tilde{t}) - \mathbf{L}_n \mathbf{U}_n \mathbf{F}_n(\tilde{t})) = 0$$

com as condições iniciais

$$\mathbf{F}_n(0) = \bar{\alpha}_n \quad \mathbf{G}_n(0) = \bar{\gamma}_n \quad (6.53)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_n(0) = \bar{\beta}_n \quad \dot{\mathbf{G}}_n(0) = \bar{\delta}_n \quad (6.54)$$

Equivalentemente, temos o sistema finito em componentes

$$\ddot{W}_i + \left( cd - a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^n k^2 W_k^2 \right) \pi^2 i^2 W_i - cd \pi i \Psi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.55)$$

$$\ddot{\Psi}_j + c \pi^2 j^2 \Psi_j + c^2 d (\Psi_j - \pi j W_j) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n$$

com as condições iniciais

$$W_i(0) = \alpha_i \quad \Psi_j(0) = \gamma_j \quad (6.56)$$

$$\dot{W}_i(0) = \beta_i \quad \dot{\Psi}_j(0) = \delta_j \quad (6.57)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

## 7 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O SISTEMA DO TIPO BI-APOIADO

Neste capítulo, o método de Dickey [21] para o modelo não linear de Timoshenko sem acoplamento devido ao giro  $\Psi$  sera estendido. Vamos estabelecer um teorema de existência local no tempo para o sistema de Timoshenko com inclusão do giro, formulado através do sistema infinito de equações não lineares (6.49).

### 7.1 O sistema infinito

Consideremos o sistema infinito (6.49), isto é,

$$\ddot{W}_i + \left( cd - a + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \right) \pi^2 i^2 W_i - cd\pi i \Psi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

$$\ddot{\Psi}_j + c\pi^2 j^2 \Psi_j + c^2 d(\Psi_j - \pi j W_j) = 0 \quad j = 0, 1, \dots$$

com condições iniciais :

$$W_i(0) = \alpha_i \quad \Psi_j(0) = \gamma_j \quad (7.2)$$

$$\dot{W}_i(0) = \beta_i \quad \dot{\Psi}_j(0) = \delta_j \quad (7.3)$$

onde  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, \dots$

Vamos inicialmente estabelecer estimativas de energia a priori para qualquer solução de (7.1). Assim, podemos enunciar o seguinte lema

**Lema 7.1.** *Qualquer solução, se existe, do sistema infinito (7.1) com dados iniciais (7.2)-(7.3) satisfaz a condição*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \dot{\Psi}_j^2 + cd(\Psi_j - \pi j W_j)^2 \right] + \\ + \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_i^2 \right)^2 = h \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde  $h$  está dado pela expressão

$$\begin{aligned} h = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \beta_i^2 + \pi^2 i^2 \gamma_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \delta_j^2 + cd(\gamma_j - \pi j \alpha_j)^2 \right] + \\ + \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \alpha_i^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

*Demonstração.* Multiplicamos a primeira equação de (7.1) pelo termo  $2\dot{W}_i$  e a segunda equação pelo termo  $\frac{2}{c}\dot{\Psi}_j$ . Depois de somar para  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, 2, \dots$  respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\dot{W}_i^2}{dt} + \left( cd - a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \right) \sum_{i=1}^{\infty} \pi^2 i^2 \frac{dW_i^2}{dt} - 2cd\pi \sum_{i=1}^{\infty} i \Psi_i \dot{W}_i = 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{d\dot{\Psi}_j^2}{dt} + \pi^2 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \frac{d\Psi_j^2}{dt} + 2cd \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_j - \pi j W_j) \dot{\Psi}_j = 0 \end{aligned}$$

Somando as duas equações chega-se a seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{d\dot{\Psi}_j^2}{dt} + cd \sum_{i=1}^{\infty} \pi^2 i^2 \frac{dW_i^2}{dt} - 2cd\pi \sum_{i=1}^{\infty} i \Psi_i \dot{W}_i +$$

$$2cd \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_j - \pi j W_j) \dot{\Psi}_j + \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 \frac{dW_k^2}{dt} = 0$$

ou de forma equivalente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{d\dot{\Psi}_j^2}{dt} + 2cd \sum_{i=1}^{\infty} \pi^2 i^2 W_i \dot{W}_i - 2cd\pi \sum_{i=1}^{\infty} i \Psi_i \dot{W}_i +$$

$$2cd \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_j - \pi j W_j) \dot{\Psi}_j + \frac{2}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{2} \pi^2 k^2 \frac{dW_k^2}{dt} = 0$$

Através de manipulações algébricas obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{d\dot{\Psi}_j^2}{dt} + 2cd \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_j - \pi j W_j) (\dot{\Psi}_j - \pi j \dot{W}_j) +$$

$$+ \frac{1}{b} \frac{d}{dt} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_i^2 \right)^2 = 0$$

A equação anterior pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{d\dot{\Psi}_j^2}{dt} + cd \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dt} (\Psi_j - \pi j W_j)^2 +$$

$$+ \frac{1}{b} \frac{d}{dt} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_i^2 \right)^2 = 0$$



Finalmente, depois de integrar, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \dot{\Psi}_j^2 + cd(\Psi_j - \pi j W_j)^2 \right] +$$

$$\frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_i^2 \right)^2 = h$$

onde, usando as condições iniciais (7.2)-(7.3),  $h$  está dado pela expressão

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \beta_i^2 + \pi^2 i^2 \gamma_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \delta_j^2 + cd(\gamma_j - \pi j \alpha_j)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \alpha_i^2 \right)^2$$

□

À primeira vista pareceria que se as condições iniciais (7.2)-(7.3) satisfazem a condição de energia finita, isto é,

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \beta_i^2 + \pi^2 i^2 \gamma_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \delta_j^2 + cd(\gamma_j - \pi j \alpha_j)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \alpha_i^2 \right)^2 < \infty \quad (7.6)$$

então o sistema (7.1) teria uma solução para todo  $t > 0$ . Na verdade, isto é o caso para sistemas finitos da forma (7.1) como veremos a seguir.

## 7.2 O sistema finito

Consideremos o sistema finito dado em (6.55), isto é,

$$\ddot{W}_i + \left( cd - a + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^n k^2 W_k^2 \right) \pi^2 i^2 W_i - cd\pi i \Psi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.7)$$

$$\ddot{\Psi}_j + c\pi^2 j^2 \Psi_j + c^2 d(\Psi_j - \pi j W_j) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n$$

com as condições iniciais (7.2)-(7.3) para  $i, j \leq n$ , isto é,

$$W_i(0) = \alpha_i \quad \Psi_j(0) = \gamma_j \quad (7.8)$$

$$\dot{W}_i(0) = \beta_i \quad \dot{\Psi}_j(0) = \delta_j \quad (7.9)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots, n$

O seguinte lema diz que se as condições iniciais (7.8)-(7.9) satisfazem a condição de energia finita (7.6), então o sistema (7.7) tem uma solução para todo  $t > 0$ .

**Lema 7.2.** *Se os dados iniciais (7.8)-(7.9) satisfazem a condição de energia finita (7.6) então o sistema (7.7) tem uma única solução no intervalo  $[0, T)$  para todo  $T > 0$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema de Cauchy-Lipschitz-Picard [16] prova-se a existência de uma única solução local  $W_i(t)$  e  $\Psi_i(t)$  para (7.7)-(7.9). Para provar que esta solução local pode estender-se para o intervalo  $[0, T)$  para todo  $T > 0$  é suficiente mostrar que  $|W_i|$ ,  $|\dot{W}_i|$ ,  $|\Psi_j|$  e  $|\dot{\Psi}_j|$  são limitadas para todo  $t \geq 0$  ([16], página 13). Para isso, procedemos da mesma forma como feito no lema 7.1 chegando a seguinte

relação

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^n \left[ \frac{1}{c} \dot{\Psi}_j^2 + cd(\Psi_j - \pi j W_j)^2 \right] + \\ + \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^n i^2 W_i^2 \right)^2 = h_n \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde  $h_n$  neste caso esta dado pela expressão

$$\begin{aligned} h_n = \sum_{i=1}^n [\beta_i^2 + \pi^2 i^2 \gamma_i^2] + \sum_{j=0}^n \left[ \frac{1}{c} \delta_j^2 + cd(\gamma_j - \pi j \alpha_j)^2 \right] + \\ + \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^n i^2 \alpha_i^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Desde que, pela hipótese,

$$h_n < h < \infty \quad (7.12)$$

decorre da equação (7.10)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^n \left[ \frac{1}{c} \dot{\Psi}_j^2 + cd(\Psi_j - \pi j W_j)^2 \right] + \\ + \frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^n i^2 W_i^2 \right)^2 < \infty \end{aligned} \quad (7.13)$$

para todo  $n$  e para todo  $t \geq 0$ . De (7.13), obtemos que as expressões  $|W_i|$ ,  $|\dot{W}_i|$ ,  $|\Psi_j|$  e  $|\dot{\Psi}_j|$  são limitadas para todo  $t \geq 0$  e a prova do lema esta concluída  $\square$

O procedimento dado no lema 7.2 não pode ser aplicado directamente ao sistema infinito (7.1) devido, por exemplo, ao fato que o termo  $i^2$  de  $W_i$  da primeira equação de (7.1) serem ilimitados quando  $i = 1, 2, \dots$ . Assim, o teorema

de Cauchy-Lipschitz-Picard já não é valido neste caso e um procedimento diferente, baseado no trabalho de Dickey [21], será usado.

O objetivo no que segue será mostrar que, baixo certas hipóteses sobre as condições iniciais (7.2)-(7.3), soluções do sistema finito (7.7) convergem para a solução de (7.1) quando  $n \rightarrow \infty$ . Para garantir esta convergência será necessário requerer que as condições iniciais (7.2)-(7.3) satisfaçam uma hipótese mais forte que a simples condição de energia finita (7.6)

Inicialmente é conveniente definir um conjunto de funções  $W_{in}$  e  $\Psi_{jn}$  como segue: para  $i, j \leq n$ ,  $W_{in}$  e  $\Psi_{jn}$  são soluções do sistema finito (7.7) satisfazendo as condições iniciais (7.2)-(7.3) para  $i, j \leq n$  e para  $i, j > n$ ,  $W_{in} \equiv 0$  e  $\Psi_{jn} \equiv 0$ .

As funções  $W_{in}$  e  $\Psi_{jn}$ , assim definidas, também são soluções do sistema infinito (7.1) satisfazendo as condições iniciais (7.2)-(7.3) para  $i, j \leq n$  e as condições iniciais

$$W_{in}(0) = 0 \quad \Psi_{jn}(0) = 0 \quad (7.14)$$

$$\dot{W}_{in}(0) = 0 \quad \dot{\Psi}_{jn}(0) = 0 \quad (7.15)$$

para  $i, j > n$ , isto é,  $W_{in}$  e  $\Psi_{jn}$  é uma solução do sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_{in} + \Delta_n \pi^2 i^2 W_{in} - cd\pi i \Psi_{in} &= 0 \quad i = 1, 2, \dots \\ \ddot{\Psi}_{jn} + c\pi^2 j^2 \Psi_{jn} + c^2 d(\Psi_{jn} - \pi j W_{jn}) &= 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde definimos  $\Delta_n$  como

$$\Delta_n = cd - a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_{kn}^2 \quad (7.17)$$

A série em (7.17) é evidentemente uma soma finita desde que  $W_{kn} = 0$  quando  $k > n$ .

Os seguintes lemas demonstram o fato que  $\{\Delta_n(t)\}_{n \geq 1}$  é uma sequência que satisfaz as hipóteses do teorema de Arzela-Ascoli [16], isto é,

- a)  $\Delta_n$  é uniformemente limitada (7.18)
- b)  $\dot{\Delta}_n$  também é uniformemente limitada (logo  $\Delta_n$  é equicontínua)

Logo, do teorema de Arzela-Ascoli temos a existência de uma subsequência  $\Delta_{n_s}$  a qual converge uniformemente para uma função contínua  $\Delta(t)$  sobre qualquer subintervalo fechado  $0 \leq t \leq t^* < t_c$  onde  $t_c$  será determinado nos lemas a seguir

**Lema 7.3.** *Se as condições iniciais (7.2)-(7.3), satisfazem as condições:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 < \infty \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 < \infty \quad (7.19)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \alpha_i^2 < \infty \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \gamma_i^2 < \infty \quad (7.20)$$

então as funções  $\Delta_n(t)$  são uniformemente limitadas independente de  $n$  para todo  $t \geq 0$

*Demonstração.* Devido ao fato de as funções  $W_{in}$ ,  $\Psi_{jn}$  serem soluções do sistema infinito (7.1) e das hipóteses (7.19)-(7.20), obtemos do lema (7.1) a desigualdade

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \dot{W}_{in}^2 + \pi^2 i^2 \Psi_{in}^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \dot{\Psi}_{jn}^2 + cd(\Psi_{jn} - \pi j W_{jn})^2 \right] + \quad (7.21)$$

$$\frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_{in}^2 \right)^2 < \infty$$

portanto, cada uma das somas em (7.21) são uniformemente limitadas, isto é, existem constantes  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$  independentes de  $n$  tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{W}_{in}^2 < M_1 \quad (7.22)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\Psi}_{in}^2 < M_2 \quad (7.23)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_{in}^2 < M_3 \quad (7.24)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \Psi_{in}^2 < M_4 \quad (7.25)$$

O lema segue da desigualdade (7.24), pois neste caso temos que

$$|\Delta_n| < \text{constante}$$

para todo  $t > 0$  e para todo  $n$ . □

**Observação 7.1.** *A hipóteses do lema (7.3) é equivalente a exigir que as condições iniciais (7.2)-(7.3) satisfagam a condição de energia finita (7.6).*

No lema seguinte uma hipótese mais forte que a simples condição de energia finita (7.6) é necessária para garantir a limitação uniforme das funções  $\dot{\Delta}_n(t)$ . A demonstração do lema é um passo chave para provar a existência de soluções para o sistema infinito (7.1)

**Lema 7.4.** *Se as condições iniciais (7.2)-(7.3) satisfazem as condições (7.19)-(7.20) e as condições*

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \beta_i^2 < \infty \quad (7.26)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \delta_i^2 < \infty \quad (7.27)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 \alpha_i^2 < \infty \quad (7.28)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 \gamma_i^2 < \infty \quad (7.29)$$

*então existe um intervalo  $0 \leq t < t_c$  tal que  $|\dot{\Delta}_n(t)|$  é uniformemente limitada independente de  $n$  sobre qualquer subintervalo fechado  $[0, t^*]$  para cada  $t^* \in [0, t_c]$ .*

*Demonstração.* Diferenciando a função  $\Delta_n$  dada em (7.2)

$$\dot{\Delta}_n = b\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} W_{kn} \dot{W}_{kn} k^2$$

e logo aplicando a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |\dot{\Delta}_n| &\leq b\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} |W_{kn}| |\dot{W}_{kn}| k^2 \\ &\leq b\pi^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |W_{kn}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\dot{W}_{kn}|^2 k^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \pi\sqrt{2} \left\{ b\Delta_n \sum_{k=1}^{\infty} |\dot{W}_{kn}|^2 k^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Nosso objetivo agora é estimar a função  $|\dot{W}_{kn}|$ . Para isso, definamos a seguinte função (ver apêndice A)

$$E_{in} = \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} + i^2 \pi^2 W_{in}^2 + \dot{\Psi}_{in}^2 + c\pi^2 i^2 \Psi_{in}^2 + c^2 d \Psi_{in}^2, \quad i \geq 1. \quad (7.31)$$

Segue-se de (1.2) que  $\Delta_n > 0$  para todo  $t \geq 0$  e  $n \geq 1$ , de modo que (7.31) tem sentido e temos

$$E_{in}(t) \geq 0, \quad t \geq 0 \quad i \geq 1. \quad (7.32)$$

Diferenciando (7.31) e usando as equações em (7.16), conseguimos

$$\dot{E}_{in} = \frac{2cd\pi i \Psi_{in} \dot{W}_{in}}{\Delta_n} - \frac{\dot{\Delta}_n}{\Delta_n} \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} + 2c^2 d \pi i W_{in} \dot{\Psi}_{in} \quad (7.33)$$

ou equivalentemente (ver apêndice A)

$$\dot{E}_{in} \leq \left( \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} + M_5 \right) E_{in} \quad (7.34)$$

onde

$$M_5 = \max \left\{ \frac{d\sqrt{c}}{\sqrt{cd-a}}, c^2d \right\} \quad (7.35)$$

Pela desigualdade de Gronwall [5], da relação (7.34), obtemos

$$E_{in} \leq E_{in}(0)M_6 \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} ds \right) \quad (7.36)$$

onde

$$M_6 = \exp(M_5T) \quad (7.37)$$

De (7.36) estabelecemos as seguintes estimativas para  $W_{in}$  e  $\dot{W}_{in}$

$$i^2\pi^2W_{in}^2 \leq E_{in}(0)M_6 \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} ds \right) \quad (7.38)$$

$$\frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} \leq E_{in}(0)M_6 \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} ds \right) \quad (7.39)$$

Defina  $K_n$  como

$$K_n = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 E_{in}(0) \quad (7.40)$$

isto é,

$$K_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{i^2\beta_i^2}{\Delta_n(0)} + i^4\pi^2\alpha_i^2 + i^2\delta_i^2 + c\pi^2i^4\gamma_i^2 + c^2di^2\gamma_i^2 \right\} \quad (7.41)$$

Note que considerando as hipóteses (7.26)-(7.29) obtemos que  $K_n < \infty$ , e, do fato que

$$\Delta_n(0) \leq \Delta_{n+1}(0) \quad (7.42)$$

obtemos a desigualdade

$$K_{n+1} \leq K_n \quad (7.43)$$

Combinando (7.39) e (7.30) segue que

$$|\dot{\Delta}_n| \leq \pi\sqrt{2} \left\{ b\Delta_n^2 K_n M_6 \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} ds \right) \right\}^{1/2} \quad (7.44)$$



ou

$$-\frac{d}{dt} \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} ds \right) \leq \frac{\pi \sqrt{bK_n M_6}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi \sqrt{bK_m M_6}}{\sqrt{2}} \quad (7.45)$$

para todo  $n \geq m$ .

Depois de integrar a desigualdade (7.45), obtemos

$$\exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} ds \right) \leq \frac{1}{1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6} t} \quad (7.46)$$

para todo  $n \geq m$  e todo  $t$  no intervalo

$$0 \leq t < t_m = \frac{1}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6}} \quad (7.47)$$

A seguir, das expressões (7.44) e (7.46), temos que quando  $n \geq m$  e  $t$  esta no intervalo (7.47),  $|\dot{\Delta}_n|$  satisfaz a limitação

$$|\dot{\Delta}_n| \leq \frac{\pi \sqrt{2bK_m M_6} \Delta_n}{1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6} t} \quad (7.48)$$

Desde que  $\Delta_n$  é uniformemente limitada independente de  $n$  (lema 7.3), a desigualdade (7.48) mostra que  $|\dot{\Delta}_n|$  também é uniformemente limitada independente de  $n$  no intervalo (7.47). Na verdade, se definimos  $K$  como

$$K = \lim_{m \rightarrow \infty} K_m \quad (7.49)$$

e  $t_c$  é definido como

$$t_c = \frac{1}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK M_6}} \quad (7.50)$$

então a expressão  $|\dot{\Delta}_n|$  será uniformemente limitada em qualquer subintervalo fechado  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ . Assim, a demonstração do lema fica concluída.  $\square$

**Observação 7.2.** A definição da função dada em (7.31), é uma extensão, para nossos propósitos, da função

$$E_{in} = \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} + i^2 W_{in}^2 \quad (7.51)$$

observada no trabalho de Dickey [21] (ver também [22], [23]) e que foi crucial para sua análise.

Para outros tipos de funções como a dada em (7.31), ver os trabalhos de Bernstein [2] e Peradze [40].

Com base nos lemas (7.3) e (7.4) e voltando as hipóteses do teorema de Arzela-Ascoli (7.18), obtemos a existência de uma subsequência  $\Delta_{n_s}$  a qual converge uniformemente para uma função contínua  $\Delta$  sobre qualquer subintervalo fechado  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ .

Usando o limite  $\Delta$  da subsequência  $\Delta_{n_s}$ , consideremos o sistema linear

$$\begin{aligned} \ddot{W}_i + \Delta \pi^2 i^2 W_i - cd \pi i \Psi_i &= 0 \\ \ddot{\Psi}_j + c \pi^2 j^2 \Psi_j + c^2 d (\Psi_j - \pi j W_j) &= 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

para algum  $i, j$ , junto com as condições iniciais (7.2)-(7.3), isto é,

$$W_i(0) = \alpha_i \quad \Psi_j(0) = \gamma_j \quad (7.53)$$

$$\dot{W}_i(0) = \beta_i \quad \dot{\Psi}_j(0) = \delta_j \quad (7.54)$$

Desejamos mostrar que as soluções  $W_i, \Psi_j$  do sistema linear (7.52) com  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, \dots$  formam uma solução do sistema infinito (7.1). Para esse propósito é suficiente mostrar que (ver lema 7.7 )

$$\Delta = cd - a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \quad (7.55)$$

Primeiramente, começamos mostrando no seguinte lema as seguintes convergências

$$\begin{aligned} W_{in_s} &\longrightarrow W_i \\ \Psi_{in_s} &\longrightarrow \Psi_i \end{aligned} \tag{7.56}$$

quando  $n_s \rightarrow \infty$ .

**Lema 7.5.** *As funções  $W_{in_s}$  e  $\Psi_{in_s}$  convergem para as funções  $W_i$  e  $\Psi_i$  respectivamente no intervalo  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ .*

*Demonstração.* Se subtraímos as  $i, j$ -ésimas equações de (7.16) de (7.52), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2(W_i - W_{in_s})}{dt^2} &= \pi^2 i^2 [\Delta_{n_s} W_{in_s} - \Delta W_i] + cd\pi i [\Psi_i - \Psi_{in_s}] \\ \frac{d^2(\Psi_j - \Psi_{jn_s})}{dt^2} &= c^2 d\pi j [W_j - W_{jn_s}] + (c\pi^2 j^2 + c^2 d) [\Psi_{jn_s} - \Psi_j] \end{aligned} \tag{7.57}$$

Desde que as condições iniciais para os sistemas (7.16) e (7.52) são as mesmas, isto implica, seguindo as discussões em [5] ou [40], que as funções  $W_i - W_{in_s}$  e  $\Psi_j - \Psi_{jn_s}$  satisfazem as equações integrais tipo Volterra

$$\begin{aligned} W_i - W_{in_s} &= \int_0^t (t - \tau) \{ \pi^2 i^2 [\Delta_{n_s} W_{in_s} - \Delta W_i] + cd\pi i [\Psi_i - \Psi_{in_s}] \} d\tau \\ \Psi_j - \Psi_{jn_s} &= \int_0^t (t - \tau) \{ \pi j c^2 d [W_j - W_{jn_s}] + (c\pi^2 j^2 + c^2 d) [\Psi_{jn_s} - \Psi_j] \} d\tau \end{aligned} \tag{7.58}$$

Somando e subtraindo o termo  $\Delta W_{in_s}$ , obtemos

$$\begin{aligned} W_i - W_{in_s} &= \pi^2 i^2 \int_0^t (t - \tau) [(\Delta_{n_s} - \Delta) W_{in_s} + \Delta(W_{in_s} - W_i)] d\tau + cd\pi i \int_0^t (t - \tau) [\Psi_i - \Psi_{in_s}] d\tau \\ \Psi_j - \Psi_{jn_s} &= \pi j c^2 d \int_0^t (t - \tau) [W_j - W_{jn_s}] d\tau + (c\pi^2 j^2 + c^2 d) \int_0^t (t - \tau) [\Psi_{jn_s} - \Psi_j] d\tau \end{aligned}$$

Aplicando, à expressão acima, o valor absoluto, conseguimos

$$|W_i - W_{in_s}| \leq \pi^2 i^2 t^* \int_0^t |\Delta_{n_s} - \Delta| |W_{in_s}| d\tau + \pi^2 i^2 t^* \int_0^t |\Delta| |W_{in_s} - W_i| d\tau + cd\pi i t^* \int_0^t |\Psi_i - \Psi_{in_s}| d\tau$$

$$|\Psi_j - \Psi_{jn_s}| \leq \pi j c^2 dt^* \int_0^t |W_j - W_{jn_s}| d\tau + (c\pi^2 j^2 + c^2 d)t^* \int_0^t |\Psi_{jn_s} - \Psi_j| d\tau$$

para  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ .

Sabemos que  $|\Delta - \Delta_{n_s}| \leq \epsilon_s$ , onde  $\epsilon_s \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$ ,  $|W_{in_s}|$  é limitada por alguma constante  $M_7$  e  $|\Delta|$  é limitada por alguma constante  $M_8$ .

Portanto

$$|W_i - W_{in_s}| \leq \pi^2 i^2 (t^*)^2 \epsilon_s M_7 + \pi^2 i^2 t^* M_8 \int_0^t |W_{in_s} - W_i| d\tau + cd\pi i t^* \int_0^t |\Psi_i - \Psi_{in_s}| d\tau$$

$$|\Psi_j - \Psi_{jn_s}| \leq \pi j c^2 dt^* \int_0^t |W_j - W_{jn_s}| d\tau + (c\pi^2 j^2 + c^2 d)t^* \int_0^t |\Psi_{jn_s} - \Psi_j| d\tau$$

Somando-se as expressões anteriores decorre que

$$|W_i - W_{in_s}| + |\Psi_i - \Psi_{in_s}| \leq \pi^2 i^2 (t^*)^2 \epsilon_s M_7 + t^* M_9 \int_0^t [|W_{in_s} - W_i| + |\Psi_{in_s} - \Psi_i|] d\tau$$

onde

$$M_9 = \max\{\pi^2 i^2 M_8 + \pi i c^2 d, \quad cd\pi i + c\pi^2 i^2 + c^2 d\}$$

A desigualdade de Gronwall [5] produz

$$|W_i - W_{in_s}| + |\Psi_i - \Psi_{in_s}| \leq \pi^2 i^2 (t^*)^2 \epsilon_s M_7 \exp(t_c^2 M_9), \quad 0 \leq t \leq t^* < t_c \quad (7.59)$$

O lado direito da desigualdade (7.59) tende a zero quando  $s \rightarrow \infty$ , de modo que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W_{in_s} = W_i \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Psi_{in_s} = \Psi_i \quad (7.60)$$

para  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ . □

De modo análogo podemos mostrar também as seguintes convergências

$$\begin{aligned}\dot{W}_{in_s} &\longrightarrow \dot{W}_i \\ \dot{\Psi}_{in_s} &\longrightarrow \dot{\Psi}_i\end{aligned}\tag{7.61}$$

quando  $n_s \rightarrow \infty$ . Mais exactamente temos o seguinte lema

**Lema 7.6.** *As funções  $\dot{W}_{in_s}$  e  $\dot{\Psi}_{in_s}$  convergem para as funções  $\dot{W}_i$  e  $\dot{\Psi}_i$  respectivamente no intervalo  $0 \leq t \leq t^* < t_c$*

*Demonstração.* Depois de derivar o sistema (7.58) e logo somando e subtraindo o termo  $\Delta W_{in_s}$ , obtemos

$$\dot{W}_i - \dot{W}_{in_s} = cd\pi i \int_0^t [\Psi_i - \Psi_{in_s}]d\tau + \pi^2 i^2 \int_0^t [(\Delta_{n_s} - \Delta)W_{in_s} + \Delta(W_{in_s} - W_i)]d\tau$$

$$\dot{\Psi}_i - \dot{\Psi}_{in_s} = (c\pi^2 i^2 + c^2 d) \int_0^t [\Psi_{in_s} - \Psi_i]d\tau + c^2 d\pi i \int_0^t [W_i - W_{in_s}]d\tau$$

Aplicando, à expressão acima, valor absoluto, obtemos

$$|\dot{W}_i - \dot{W}_{in_s}| \leq cd\pi i t^* \mu_s + \pi^2 i^2 t^* \epsilon_s M_7 + \pi^2 i^2 t^* \rho_s M_8\tag{7.62}$$

$$|\dot{\Psi}_i - \dot{\Psi}_{in_s}| \leq (c\pi^2 i^2 + c^2 d)t^* \mu_s + c^2 d\pi i t^* \rho_s$$

onde

$$\begin{aligned}|\Delta - \Delta_{n_s}| &\leq \epsilon_s \\ |\Psi_i - \Psi_{in_s}| &\leq \mu_s \\ |W_i - W_{in_s}| &\leq \rho_s\end{aligned}\tag{7.63}$$

e, aplicando o lema 7.5

$$\epsilon_s, \mu_s, \rho_s \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty\tag{7.64}$$

De (7.62) temos finalmente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \dot{W}_{in_s} = \dot{W}_i \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \dot{\Psi}_{in_s} = \dot{\Psi}_i \quad (7.65)$$

para  $t$  no intervalo  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ .  $\square$

Finalmente, o lema seguinte demonstra que soluções de (7.52) formam uma solução do sistema infinito (7.1)

**Lema 7.7.** *A solução  $W_i, \Psi_j$  de (7.52) é solução do sistema (7.1) no intervalo  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ .*

*Demonstração.* Para mostrar que a solução de (7.52) é solução de (7.1) é suficiente mostrar a igualdade (7.55), isto é,

$$\Delta = cd - a + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2 \quad (7.66)$$

A série em (7.66) converge desde que pelas expressões (7.36), (7.46) e os lemas (7.5) e (7.6), segue que

$$i^2 \pi^2 W_i^2 = \lim_{n_s \rightarrow \infty} i^2 \pi^2 W_{in_s}^2 \leq E_i(0) \frac{M_6}{1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6 t}} \quad (7.67)$$

$$\dot{W}_i^2 = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \dot{W}_{in_s}^2 \leq \Delta E_i(0) \frac{M_6}{1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6 t}} \quad (7.68)$$

$$ci^2 \pi^2 \Psi_i^2 = \lim_{n_s \rightarrow \infty} ci^2 \pi^2 \Psi_{in_s}^2 \leq E_i(0) \frac{M_6}{1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6 t}} \quad (7.69)$$

$$\dot{\Psi}_i^2 = \lim_{n_s \rightarrow \infty} \dot{\Psi}_{in_s}^2 \leq E_i(0) \frac{M_6}{1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{bK_m M_6 t}} \quad (7.70)$$

para  $m$  arbitrário, onde

$$E_i(0) = \frac{\beta_i^2}{\Delta(0)} + i^2 \pi^2 \alpha_i^2 + \delta_i^2 + c\pi^2 i^2 \gamma_i^2 + c^2 d \gamma_i^2 \quad (7.71)$$

e

$$E_i(0) = \lim_{n_s \rightarrow \infty} E_{in_s}(0) \quad (7.72)$$

Assim, da relação (7.67) e das hipóteses (7.26)-(7.29), temos que a série em (7.66) converge. A igualdade em (7.66) segue das seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |\Delta - cd + a - \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2| &\leq |\Delta - \Delta_{n_s}| + |\Delta_{n_s} - cd + a - \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2| \\ &\leq |\Delta - \Delta_{n_s}| + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |W_{kn_s}^2 - W_k^2| \\ &= |\Delta - \Delta_{n_s}| + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^n k^2 |W_{kn_s}^2 - W_k^2| + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 |W_{kn_s}^2 - W_k^2| \\ &\leq |\Delta - \Delta_{n_s}| + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^n k^2 |W_{kn_s}^2 - W_k^2| + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 (W_{kn_s}^2 + W_k^2) \end{aligned}$$

Da estimativa (7.38 ) conseguimos

$$|\Delta - cd + a - \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W_k^2| \leq |\Delta - \Delta_{n_s}| + \frac{b}{2}\pi^2 \sum_{k=1}^n k^2 |W_{kn_s}^2 - W_k^2| + bM_{10} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (7.73)$$

onde  $M_{10}$  é uma constante positiva.

Podemos fazer o lado direito de (7.73) arbitrariamente pequeno elegendo  $n$  suficientemente grande de modo que o termo final seja suficientemente pequeno, logo elegemos  $n_s$  de modo que os termos restantes sejam pequenos. Assim, temos a igualdade (7.66)  $\square$

Os resultados desta seção podem ser resumidos no seguinte teorema

**Teorema 7.1.** *O sistema infinito de equações (7.1) com dados iniciais (7.2)-(7.3) tem uma solução sobre qualquer subintervalo fechado  $0 \leq t \leq t^* < t_c$  se as condições iniciais (7.2)-(7.3) satisfazem as hipóteses (7.19)-(7.20) e (7.26)-(7.29).*

**Observação 7.3.** *O requerimento que as condições iniciais satisfazem (7.19)-(7.20) e (7.26)-(7.29) é redundante desde que (7.26)-(7.29) implica (7.19)-(7.20).*

Em qualquer caso, o fato que as funções  $W_i$  e  $\Psi_i$  são limites de  $W_{in_s}$  e  $\Psi_{in_s}$  quando  $n_s \rightarrow \infty$  (lema 7.5) mostra que (ver as desigualdades (7.22)-(7.25))

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{W}_i^2 \leq M_1 \quad (7.74)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{\Psi}_i^2 \leq M_2 \quad (7.75)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_i^2 \leq M_3 \quad (7.76)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \Psi_i^2 \leq M_4 \quad (7.77)$$

e, além disso, (7.26)-(7.29) e (7.67)-(7.70) mostram que

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \dot{W}_i^2 \leq M_{11} \quad (7.78)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 W_i^2 \leq M_{12} \quad (7.79)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \dot{\Psi}_i^2 \leq M_{13} \quad (7.80)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 \Psi_i^2 \leq M_{14} \quad (7.81)$$

para  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ , isto é as somas infinitas (7.74)-(7.77) e (7.78)-(7.81) todas convergem.

A prova de existência estudada acima tem a dificuldade que a construção da solução não é única, isto é, é possível que existam distintas subsequências de  $\{\Delta_n\}_{n \geq 1}$  as quais converjam para diferentes limites e assim gerem diferentes soluções



de (7.1). No entanto, no seguinte capítulo mostraremos que a solução de (7.1) é única. Segue deste resultado que a sequência  $\{\Delta_n\}_{n \geq 1}$  converge para um único limite e, além disso, a solução do sistema finito (7.7) converge para a solução do sistema infinito (7.1) quando  $n \rightarrow \infty$ .

## 8 UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Neste capítulo mostraremos que a solução de (7.1) satisfazendo as condições iniciais (7.2)-(7.3) é única. Especificamente, mostraremos que se os dados iniciais (7.2)-(7.3) satisfazem as hipóteses (7.26)-(7.29), então (7.1) tem exatamente uma solução satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \dot{W}_i^2 < \infty \quad (8.1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 W_i^2 < \infty \quad (8.2)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \dot{\Psi}_i^2 < \infty \quad (8.3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^4 \Psi_i^2 < \infty \quad (8.4)$$

para  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ .

Para mostrar a unicidade de soluções de (7.1), suponhamos a existência de dois conjuntos de soluções  $(W_i, \Psi_j)$  e  $(\bar{W}_i, \bar{\Psi}_j)$  satisfazendo as condições iniciais (7.2)-(7.3) e as condições (8.1)-(8.4) para  $0 \leq t < t_c$ , isto é,  $(W_i, \Psi_j)$  é solução de (7.52) onde  $\Delta$  esta dado por (7.66) e  $(\bar{W}_i, \bar{\Psi}_j)$  é solução de

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{W}}_i + \pi^2 i^2 \bar{\Delta} \bar{W}_i - cd\pi i \bar{\Psi}_i &= 0 \\ \ddot{\bar{\Psi}}_j + c\pi^2 j^2 \bar{\Psi}_j + c^2 d(\bar{\Psi}_j - \pi j \bar{W}_j) &= 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

para  $i = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, 2, \dots$  e onde

$$\bar{\Delta} = cd - a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \bar{W}_k^2 \quad (8.6)$$

A função  $\Delta$  (e  $\bar{\Delta}$ ) é diferenciável no intervalo  $0 \leq t < t_c$  desde que a desigualdade de Schwarz implica

$$|\dot{\Delta}| \leq b\pi^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^4 W_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \dot{W}_k^2 \right\}^{1/2} \quad (8.7)$$

A primeira soma de (8.7) converge devido a (8.2) e a segunda soma converge devido ao fato que as funções  $W_i, \Psi_j$  (e  $\bar{W}_i, \bar{\Psi}_j$ ) satisfazem a expressão (7.4), isto é,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \dot{W}_i^2 + \pi^2 i^2 \Psi_i^2 \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{c} \dot{\Psi}_j^2 + cd(\Psi_j - \pi j W_j)^2 \right] + \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{b} \left( -a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 W_i^2 \right)^2 = h.$$

Assim, ambas somas em (8.7) convergem e são de fato uniformemente limitadas sobre qualquer subintervalo fechado  $0 \leq t \leq t^* < t_c$ . Além disso, e desde que  $\Delta > 0$ , podemos repetir a prova do lema 7.4 para mostrar que

$$\exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} ds \right) \leq M_{15} \quad (8.9)$$

para  $0 \leq t \leq t^* < t_c$  e onde  $M_{15}$  é uma constante positiva.

Defina  $\theta_i$  e  $\eta_j$  como as diferenças

$$\theta_i(t) = W_i(t) - \bar{W}_i(t) \quad \text{e} \quad \eta_j(t) = \Psi_j(t) - \bar{\Psi}_j(t) \quad (8.10)$$

de modo que  $\theta_i, \eta_j$  será uma solução do sistema

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_i + \pi^2 i^2 \Delta \theta_i &= \pi^2 i^2 (\bar{\Delta} - \Delta) \bar{W}_i + cd\pi i \eta_i \\ \ddot{\eta}_j + c\pi^2 j^2 \eta_j + c^2 d \eta_j &= c^2 d \pi j \theta_j \end{aligned} \quad (8.11)$$

e satisfaz as condições iniciais

$$\theta_i(0) = 0 \quad \eta_j(0) = 0 \quad (8.12)$$

$$\dot{\theta}_i(0) = 0 \quad \dot{\eta}_j(0) = 0 \quad (8.13)$$

Nosso objetivo é mostrar que a única solução de (8.11) satisfazendo (8.12) e (8.13) é a solução trivial. Para isso estenderemos o método de Dickey ([21], [22], [23]) para o sistema (8.11).

**Observação 8.1.** *Seguindo a discussão da unicidade para a equação (1.4) em William [50] é possível demonstrar a unicidade encontrando uma desigualdade tipo Gronwall para as funções  $\theta_i$ ,  $\eta_j$ . No entanto, devido a forma do sistema (8.11) é difícil encontrar tal desigualdade.*

É conveniente começar encontrando estimativas sobre as soluções de (8.11). Para isso defina a função (observação A.1 do Apêndice A)

$$E_i = \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta} + i^2 \pi^2 \theta_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + c \pi^2 i^2 \eta_i^2 + c^2 d \eta_i^2, \quad i \geq 1. \quad (8.14)$$

Diferenciando (8.14), segue do sistema (8.11)

$$\dot{E}_i = -\frac{\dot{\Delta}}{\Delta} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta} + \frac{2\pi^2 i^2 (\bar{\Delta} - \Delta) \bar{W}_i \dot{\theta}_i}{\Delta} + \frac{2cd\pi i \eta_i \dot{\theta}_i}{\Delta} + 2c^2 d \pi i \theta_i \dot{\eta}_i \quad (8.15)$$

e, daí, (observação A.1 do Apêndice A)

$$\dot{E}_i \leq \left( \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} + M_5 \right) E_i + \frac{2\pi^2 i^2 |\bar{\Delta} - \Delta| |\bar{W}_i \dot{\theta}_i|}{\Delta} \quad (8.16)$$

onde

$$M_5 = \max \left\{ \frac{d\sqrt{c}}{\sqrt{cd - a}}, \quad c^2 d \right\}$$

De (8.16) e por Gronwall [5],

$$E_i(t) \leq M_{16} \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} d\tau \right) \int_0^t \frac{2\pi^2 i^2 |\bar{\Delta} - \Delta| |\bar{W}_i \dot{\theta}_i|}{\Delta} d\tau \quad (8.17)$$

onde

$$M_{16} = \exp(M_5 t^*)$$

Depois de somar sobre  $i$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i(t) \leq 2 \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} d\tau \right) \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (8.18)$$

onde

$$I(\tau) = \frac{M_{16} \pi^2 |\bar{\Delta} - \Delta|}{\Delta} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 |\bar{W}_i| |\dot{\theta}_i| \quad (8.19)$$

A função  $I(\tau)$  pode ser estimada usando a desigualdade de Schwarz. Assim,

$$\begin{aligned} |\bar{\Delta} - \Delta| &\leq \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\bar{W}_k - W_k| |\bar{W}_k + W_k| \\ &\leq \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\theta_k| |\bar{W}_k + W_k| \\ &\leq \frac{b}{2} \pi \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \pi^2 \theta_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\bar{W}_k + W_k|^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (8.20)$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 |\bar{W}_i| |\dot{\theta}_i| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^4 |\bar{W}_i|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\dot{\theta}_i|^2 \right\}^{1/2} \quad (8.21)$$

de modo que a expressão (8.19) pode ser escrita como

$$I(\tau) \leq G(t) \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \pi^2 \theta_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta} \right\}^{1/2} \quad (8.22)$$

onde

$$G(t) = M_{17} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (\bar{W}_i + W_i)^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^4 \frac{\bar{W}_i^2}{\Delta} \right\}^{1/2} \quad (8.23)$$

e

$$M_{17} = M_{16} \pi^3 \frac{b}{2} \quad (8.24)$$

Admitindo as relações (8.1)-(8.4) e (8.8) obtemos que a função  $G(t)$  em (8.23) é uma função limitada sobre qualquer subintervalo fechado de  $[0, t_c)$ . Portanto, desde que a função exponencial em (8.9) é também limitada sobre qualquer subintervalo fechado de  $[0, t_c)$ , e seguindo a discussão em Dickey [21] (ver também [22], [23]), existe um intervalo  $0 \leq t \leq t_1 < t_c$  tal que

$$t \exp \left( \int_0^t \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} ds \right) G(t) < 1 \quad (8.25)$$

para todo  $t$  no intervalo  $0 \leq t \leq t_1$ .

**Lema 8.1.**  $I(t) \equiv 0$  para todo  $t$  no intervalo  $0 \leq t \leq t_1$ .

*Demonstração.* A demonstração do lema é por contradição, isto é, suponha que  $I(t) \neq 0$  para  $t$  no intervalo  $[0, t_1]$ . Assuma que o máximo valor de  $I(t)$  em o intervalo  $0 \leq t \leq t_1$  ocorre em  $t = \mu$ . Então  $\mu \neq 0$  já que  $I(0) = 0$ . A desigualdade (8.18) implica que

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i(\mu) \leq 2\mu \exp \left( \int_0^{\mu} \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} d\tau \right) I(\mu) \quad (8.26)$$

ou equivalentemente pela expressão (8.22)

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i(\mu) \leq 2\mu \exp \left( \int_0^{\mu} \frac{|\dot{\Delta}|}{\Delta} d\tau \right) G(\mu) \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \pi^2 \theta_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta} \right\}_{t=\mu}^{1/2} \quad (8.27)$$

Desde que  $0 \leq \mu \leq t_1$ , segue da desigualdade (8.25)

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i(\mu) < 2 \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \pi^2 \theta_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta} \right\}_{t=\mu}^{1/2} \quad (8.28)$$

Lembrando a definição de  $E_i$  em (8.14), a desigualdade (8.28) pode ser reescrita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta} + \sum_{k=1}^{\infty} i^2 \pi^2 \theta_i^2 - 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} i^2 \pi^2 \theta_i^2} < 0 \quad \text{para } t=\mu \quad (8.29)$$

ou equivalentemente

$$\left\{ \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{\theta}_i^2}{\Delta}} - \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} i^2 \pi^2 \theta_i^2} \right\}_{t=\mu}^2 < 0 \quad (8.30)$$

Esta contradição mostra que  $I(\mu) = 0$ , e portanto,  $I(t) = 0$  para  $t$  no intervalo  $[0, t_1]$ . Assim, a demonstração do lema esta concluída.  $\square$

O lema 8.1 junto com (8.18) mostram que  $E_j \equiv 0$  para  $t$  no intervalo  $[0, t_1]$  ou equivalentemente

$$\begin{aligned} W_i(t) &\equiv \bar{W}_i(t), & \Psi_i(t) &\equiv \bar{\Psi}_i(t) \\ \dot{W}_i(t) &\equiv \dot{\bar{W}}_i(t), & \dot{\Psi}_i(t) &\equiv \dot{\bar{\Psi}}_i(t) \end{aligned} \quad (8.31)$$

no intervalo  $0 \leq t \leq t_1$ . No entanto, este resultado pode ser estendido ao intervalo  $0 \leq t < t_c$  sempre que (8.1)-(8.4) é satisfeito.

Assuma que exista um conjunto de pontos em o intervalo  $0 \leq t < t_c$  para os quais

$$W_i(t) \neq \bar{W}_i(t) \quad \text{e} \quad \Psi_i(t) \neq \bar{\Psi}_i(t) \quad (8.32)$$

e tal que  $W_i, \Psi_i$  junto com  $\bar{W}_i, \bar{\Psi}_i$  satisfazem a condição (8.1)-(8.4). Este conjunto tem um ínfimo  $t' \geq t_1$ . Desde que as funções  $W_i, \Psi_i, \bar{W}_i$  e  $\bar{\Psi}_i$  são continuamente diferenciáveis para  $0 \leq t < t_c$ , segue que

$$\begin{aligned} W_i(t') &= \bar{W}_i(t'), & \Psi_i(t') &= \bar{\Psi}_i(t') \\ \dot{W}_i(t') &\equiv \dot{\bar{W}}_i(t'), & \dot{\Psi}_i(t') &= \dot{\bar{\Psi}}_i(t') \end{aligned} \quad (8.33)$$

com (8.1)-(8.4) validas também em  $t = t'$ .

Desde que  $t' < t_c$  o procedimento desta capítulo pode repetir-se (com  $t = t'$  como ponto inicial) para mostrar que

$$\begin{aligned}\theta_i &\equiv 0, & \eta_i &\equiv 0 \\ \dot{\theta}_i &\equiv 0, & \dot{\eta}_i &\equiv 0\end{aligned}\tag{8.34}$$

em algum intervalo a direita de  $t = t'$ . Portanto,  $t = t'$  não pode ser o ínfimo dos pontos para os quais

$$W_i(t) \neq \bar{W}_i(t) \quad \text{e} \quad \Psi_i(t) \neq \bar{\Psi}_i(t)\tag{8.35}$$

Esta contradição prova o seguinte teorema

**Teorema 8.1.** *O sistema infinito de equações (7.1) com dados iniciais (7.2)-(7.3) tem uma única solução satisfazendo as condições (8.1)-(8.4) se os dados iniciais satisfazem a condição (7.26)-(7.29).*



## 9 CONCLUSÕES

O presente trabalho de pesquisa visou o estudo das vibrações de uma viga elástica não linear de Timoshenko sobre influência de uma força axial constante compressível em cada extremo da viga.

O modelo não linear de Timoshenko foi obtido através do princípio de Hamilton estendido.

A função de energia foi derivada de maneira geral, incluindo o caso linear e com identificação das condições de contorno de natureza conservativa.

A determinação dos modos ou autofunções do sistema linear foi realizada segundo o método de Claeysen ([9], [11], [12], [13], [14], [15], [47]). Este método permite encontrar os modos usando as equações de segunda ordem acopladas. Também foram obtidas os modos na base de Euler.

A ortogonalidade dos modos é obtida para condições de contorno clássicas.

O método de Galerkin foi formulado matricialmente e existência e unicidade local foram obtidos para uma viga bi-apoiada seguindo o trabalho de Dickey [21].

Para trabalhos futuros podemos aprofundar o estudo do modelo não-linear de Timoshenko (6.1), supondo  $W_i(t) = \Psi_i(t)$  (amplitudes iguais) na aproximação de Galerkin (6.2). Assumindo a igualdade das amplitudes, obtemos a natureza sincronizada entre o deslocamento transversal  $W^0(t, x)$  e a orientação  $\Psi(t, x)$  da viga.

# Apêndice A DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO $E_{IN}$

Neste apêndice, usando as idéias Dickey [21] (ver também [22], [23]), veremos como surge a definição da função  $E_{in}$  dado na demonstração do lema (7.4) do capítulo 7, seguidamente, provaremos a desigualdade (7.34).

## Definição da função $E_{in}$ .

Consideremos novamente o sistema finito (7.7), isto é, o sistema

$$\ddot{W}_{in} + \Delta_n \pi^2 i^2 W_{in} - cd\pi i \Psi_{in} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

$$\ddot{\Psi}_{jn} + c\pi^2 j^2 \Psi_{jn} + c^2 d(\Psi_{jn} - \pi j W_{jn}) = 0 \quad j = 0, \dots, n$$

onde

$$\Delta_n(t) = cd - a + \frac{b}{2} \pi^2 \sum_{k=1}^n k^2 W_{kn}^2 \quad (\text{A.2})$$

Multiplicando a primeira equação de (A.1) pelo termo  $2\dot{W}_{in}$  e a segunda pelo termo  $2\dot{\Psi}_{in}$ , obtemos

$$2\ddot{W}_{in} \dot{W}_{in} + 2\Delta_n \pi^2 i^2 W_{in} \dot{W}_{in} - 2cd\pi i \Psi_{in} \dot{W}_{in} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$2\ddot{\Psi}_{in} \dot{\Psi}_{in} + 2c\pi^2 i^2 \Psi_{in} \dot{\Psi}_{in} + 2c^2 d \Psi_{in} \dot{\Psi}_{in} - 2c^2 d W_{in} \dot{\Psi}_{in} = 0$$

ou de forma equivalente

$$\frac{1}{\Delta_n} \frac{d}{dt} \dot{W}_{in}^2 + \pi^2 i^2 \frac{d}{dt} W_{in}^2 = 2cd\pi i \Psi_{in} \frac{\dot{W}_{in}}{\Delta_n} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\Psi}_{in}^2 + c\pi^2 i^2 \frac{d}{dt} \Psi_{in}^2 + c^2 d \frac{d}{dt} \Psi_{in}^2 = 2c^2 d \pi i W_{in} \dot{\Psi}_{in}$$

Somando-se as duas equações acima, obtém-se

$$\frac{1}{\Delta_n} \frac{d}{dt} \dot{W}_{in}^2 + \pi^2 i^2 \frac{d}{dt} W_{in}^2 + \frac{d}{dt} \dot{\Psi}_{in}^2 + c\pi^2 i^2 \frac{d}{dt} \Psi_{in}^2 + c^2 \frac{d}{dt} \dot{\Psi}_{in}^2 = 2cd\pi i \Psi_{in} \frac{\dot{W}_{in}}{\Delta_n} + 2c^2 d\pi i W_{in} \dot{\Psi}_{in} \quad (\text{A.5})$$

Mas como

$$\frac{1}{\Delta_n} \frac{d}{dt} \dot{W}_{in}^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} \right) + \frac{\dot{\Delta}_n}{\Delta_n} \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n},$$

introduzindo esta ultima expressão em (A.5) chega-se à seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} \right) + \pi^2 i^2 \frac{d}{dt} W_{in}^2 + \frac{d}{dt} \dot{\Psi}_{in}^2 + c\pi^2 i^2 \frac{d}{dt} \Psi_{in}^2 + c^2 \frac{d}{dt} \dot{\Psi}_{in}^2 = 2cd\pi i \Psi_{in} \frac{\dot{W}_{in}}{\Delta_n} + \\ + 2c^2 d\pi i W_{in} \dot{\Psi}_{in} - \frac{\dot{\Delta}_n}{\Delta_n} \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ou ainda, definindo a função  $E_{in}(t)$  pela expressão

$$E_{in}(t) = \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} + \pi^2 i^2 W_{in}^2 + \dot{\Psi}_{in}^2 + c\pi^2 i^2 \Psi_{in}^2 + c^2 \dot{\Psi}_{in}^2 \quad (\text{A.7})$$

temos de (A.6) a seguinte relação

$$\dot{E}_{in} = 2cd\pi i \Psi_{in} \frac{\dot{W}_{in}}{\Delta_n} + 2c^2 d\pi i W_{in} \dot{\Psi}_{in} - \frac{\dot{\Delta}_n}{\Delta_n} \frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n}. \quad (\text{A.8})$$

### Demonstração da desigualdade (7.34)

A fim de estabelecer a desigualdade (7.34) no lema 7.4 devemos estimar cada um dos termos em (A.8). Para isso usamos a desigualdade de Cauchy [53] para os dois primeiros termos de (A.8) e aplicamos valor absoluto para o ultimo termo, isto é,

$$2cd\pi i\Psi_{in}\frac{\dot{W}_{in}}{\Delta_n} \leq \frac{d\sqrt{c}}{\sqrt{\Delta_n}}\left(\frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} + c\pi^2 i^2\Psi_{in}^2\right) \leq \frac{d\sqrt{c}}{\sqrt{\Delta_n}}E_{in}$$

$$2c^2d\pi iW_{in}\dot{\Psi}_{in} \leq c^2d\left(\pi^2 i^2W_{in}^2 + \dot{\Psi}_{in}^2\right) \leq c^2dE_{in} \quad (\text{A.9})$$

$$-\frac{\dot{\Delta}_n}{\Delta_n}\frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} \leq \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n}\frac{\dot{W}_{in}^2}{\Delta_n} \leq \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n}E_{in}$$

Assim, observando que

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{cd-a}} \quad (\text{A.10})$$

temos de (A.8)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{in} &\leq \frac{d\sqrt{c}}{\sqrt{\Delta_n}}E_{in} + \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n}E_{in} + c^2dE_{in} \\ &\leq \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n}E_{in} + M_5E_{in} \\ &\leq \left(\frac{|\dot{\Delta}_n|}{\Delta_n} + M_5\right)E_{in} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde

$$M_5 = \max\left\{\frac{d\sqrt{c}}{\sqrt{cd-a}}, c^2d\right\}$$

**Observação A.1.** *Procedendo da mesma forma como feito acima, chegamos às relações (8.14) e (8.16), do capítulo 8, referentes a unicidade de soluções.*

## Referências Bibliográficas

- [1] AROSIO, A., AND GARAVALI, S. On the mildly degenerate Kirchhoff string. *Math. Meth. Appl. Sci* 14 (1991), 177–195 MR 92c:35072.
- [2] BERNSTEIN, S. On a class of functional partial-differential equations. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 4 (1940), 17–26.
- [3] BIDEL, A. C. L., AND CLAEYSSSEN, J. C. R. A função de green matricial na caracterização de respostas periódicas em sistemas dinâmicos. *In: III Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações. Ilha Solteira/SP* (2004).
- [4] BIHUNA, E., CLAEYSSSEN, J. C. R., AND COSTA, S. A resposta fundamental na caracterização de autovalores duplos em vigas de Timoshenko. *In: IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações. Bauru* (2005).
- [5] BRAUER, F., AND NOHEL, J. A. *Ordinary differential equations*. Benjamin, New York, 1967.
- [6] CARRIER, G. F. On the nonlinear vibration problem of the elastic string. *Quart. Appl. Math.* 3 (1945), 157–165.
- [7] CLAEYSSSEN, J. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dynamical matrix solutions. *Journal of Sound and Vibration* 140, 1 (1990), 73–84.
- [8] CLAEYSSSEN, J., GARIBOTTI, C., AND VIELMO, S. E. The free surface of a coupled ocean-atmosphere model due to forcing effects. *Mathematics and Computers in Simulation* 73 (2006), 114–124.

- [9] CLAEYSSSEN, J., MORAES, I., AND SUAZO, G. A resposta impulso em problemas de dinâmica e controle: Uma abordagem operacional direta. *Aplicon* (2001).
- [10] CLAEYSSSEN, J., MORAES, I. F., AND COPETTI, R. D. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied Numerical Mathematics* 47 (2003), 391–415.
- [11] CLAEYSSSEN, J., AND SODER, R. A dynamical basis for computing the modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 259, 4 (2003), 986–990.
- [12] CLAEYSSSEN, J., AND TSUKAZAN, T. Dynamical solutions of linear matrix differential equations. *Quarterly of Applied Mathematics XLVIII*, 1 (1990), 1053–1058.
- [13] CLAEYSSSEN, J. C. R., CANAHUALPA, G., AND JUNG, C. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics* 30, 1 (1999), 65–78.
- [14] CLAEYSSSEN, J. C. R., COPETTI, R. D., AND BALTHAZAR, J. M. Modal analysis of a beam with a tip rotor by using a fundamental response. *Materials Science Forum, Suíça* 440 (2003), 261–268.
- [15] CLAEYSSSEN, J. C. R., AND COSTA, S. N. Modes for the coupled Timoshenko model with a restrained end. *Journal of Sound and Vibration* 296 (2006), 1053–1058.
- [16] CODDINGTON, E., AND LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. Jhon Wiley, New York, 1969.
- [17] COPETTI, R. D., AND CLAEYSSSEN, J. C. Modelo giroscópico para vibrações em uma serra de fita. *Tema (São Paulo) Nova Friburgo* 4, 1 (2003), 11–20.

- [18] COPETTI, R. D., CLAEYSSSEN, J. C., AND TSUKAZAN, T. Modal formulation of segmented Euler-Bernoulli beams. *Mathematical Problems in Engineering 1* (2007), ID36261–18.
- [19] COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*. (1966), 335–340.
- [20] DADFARNIA, M., JALILI, N., AND ESMAILZADEH, E. A comparative study of the Galerkin approximation utilized in the Timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 280 (2005), 1132–1142.
- [21] DICKEY, R. W. Infinite systems of nonlinear oscillations equations related to the string. *Proc. Amer. Math. Soc.* 23 (1969), 459–468.
- [22] DICKEY, R. W. Infinite systems of nonlinear oscillation equations with linear damping. *SIAM J. Appl. Math.* 19, 1 (1970), 19–26.
- [23] DICKEY, R. W. The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A82(1-2)* (1978), 19–26.
- [24] EBIHARA, Y. On the existence of local smooth solutions for some degenerate quasilinear hyperbolic equations. *An. Acad. Bras. Ciênc.* 57 (1985), 145–152.
- [25] EBIHARA, Y., AND MEDEIROS, L. A. Local solution for a nonlinear degenerate hyperbolic equation. *Nonlinear Anal. T.M.A.* 10 (1986), 27–40.
- [26] GARAVALDI, S. *Su un modello integrodifferenziale non lineare della corda/membrana vibrante*. Tesi di Laurea, Univ. Parma, December 1989.
- [27] GARIBOTTI, C. R., CLAEYSSSEN, J. C. R., COSTA, S. N. J., AND TSUKAZAN, T. Computing responses of evolutions equations with the dynamical basis. *In: VIII Workshop on Partial Differential Equations, 2003, IMPA, Rio de Janeiro*.

- [28] HAN, S., AND BENAROYA, H. Dynamics of transversely vibrating beams using engineering theories. *Journal of Sound and Vibration* 5, 225 (1999), 935–988.
- [29] HAN, S., AND BENAROYA, H. *Nonlinear and Stochastic Dynamics of Compliant Offshore Structures, vol. 1*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2002.
- [30] HERMANN, G. Forced motions of Timoshenko beams. *Journal of Applied Mechanics*, 77 (1955), 53–56.
- [31] HIRSCHHORN, M., AND REISS, E. Dynamic buckling of a nonlinear Timoshenko beam. *SIAM J. Appl. Math.* 37 (1979), 290–301.
- [32] HUANG, T. C. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics*. (1961), 579–584.
- [33] INMAN, D. *Engineering Vibration*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [34] KATO, T. Quasilinear equations of evolution, with applications to partial differential equations. *Lecture Notes in Math* 448 (1975), 25–70.
- [35] KHDEIR, A., AND REDDY, J. Exact solutions for transient response of symmetric cross-ply laminates using a higher order plate theory. *Composites Science and Technology*, 34 (1989), 205–224.
- [36] KIRCHHOFF, G. *Vorlesungen über Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1883.
- [37] MEIROVITCH, L. *Analytical Methods in Vibration*. Mcmillian Publishing Co., 1967.
- [38] MEIROVITCH, L. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1986.



- [39] MENZALA, G. A. P., AND BURIOL, C. Time behavior for a class of nonlinear beam equations. *Differential and Integral Equations* 19 (2006), 15–29.
- [40] PERADZE, J. The existence of a solution and a numerical method for the Timoshenko nonlinear wave system. *ESAIM: M2AN* 38, 1 (2004), 1–26.
- [41] REISS, E., AND MATKOWSKY, B. Nonlinear dynamic buckling of a compressed elastic column. *Q Appl. Math.* 29 (1971), 245–260.
- [42] RIVERA RODRIGUEZ, P. H. On local strong solution of a nonlinear partial differential equation. *Appl. Anal.* 50 (1980), 93–104.
- [43] SKOLNIKOFF, I. S. *Tensor Analysis, Theory and Applications*. New York: Wiley, 1958.
- [44] TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine* 41, 744 (1922).
- [45] TIMOSHENKO, S. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine* 43, 125 (1922).
- [46] TIMOSHENKO, S. *Théorie des vibrations*. Beranger, Paris, 1947.
- [47] TSUKAZAN, T. The use of the dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Journal of Sound and Vibrations* 281 (2005), 1175–1185.
- [48] TUCSNAK, M. On an initial boundary value problem for the nonlinear Timoshenko beam. *Ann. Acad. Bras. Ciênc.* 63 (1991), 115–125.
- [49] WHITE, M. W. D., AND HAPLER, G. R. Vibration modes and frequencies of Timoshenko beams with attached rigid bodies. *Journal of Applied Mechanics* 62 (1995), 193–199.

- [50] WILLIAM, G. Global solutions of a nonlinear string equation. *Journal of mathematical Analysis and Applications* 192 (1995), 689–704.
- [51] YAMADA, Y. Some nonlinear degenerate wave equations. *Nonlinear Anal. T.M.A.* 10 (1987), 1155–1168.
- [52] YAMAZAKI, T. On local solutions of some quasilinear degenerate hyperbolic equations. *Funkcial. Ekvac. Anal. T.M.A.* 31 (1988), 439–457.
- [53] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A*. Springer-Verlag, New York, 1990.