ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVIII (2002)

Jerzy Kaczorowski (Poznań)

Czwarty problem milenijny: Hipoteza Riemanna

1. Funkcja dzeta Riemanna i Hipoteza Riemanna. W trakcie badania rozmaitych zagadnień arytmetycznych, teoretycy liczb i geometrzy stwierdzili dużą przydatność pewnych funkcji zmiennej zespolonej zwanych funkcjami L lub funkcjami typu dzeta. Historycznie pierwszym przykładem była funkcja *dzeta Riemanna*, która pojawiła się w słynnej pracy Riemanna z 1858 r. pt. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Podstawowym wnioskiem płynącym z memoriału Riemanna było stwierdzenie, że zbadanie analitycznych własności tej funkcji stanowi klucz do zrozumienia podstawowych faktów dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych. Badania, które trwają nieprzerwanie od niemal 150 lat, dostarczają licznych dowodów prawdziwości tej tezy. Dziś jest oczywiste, że funkcja dzeta Riemanna oraz jej liczne uogólnienia mają zasadnicze znaczenie dla teorii liczb. Jest też jasne, iż mimo wspaniałych postępów w badaniu tych niezwykle interesujących funkcji, jesteśmy jeszcze bardzo daleko od zadowalającego opisu ich własności.

Praca Riemanna zawiera sformułowanie słynnej hipotezy, znanej powszechnie jako *Hipoteza Riemanna.* Celem niniejszego artykułu jest przedyskutowanie tego zagadnienia, które uważane jest obecnie za jedno z najważniejszych problemów otwartych matematyki. Rozległość problematyki poruszanej przez nas jest olbrzymia. Stąd konieczność skrótowego ujęcia wielu ważnych kwestii. Autor jest świadomy, że może to powodować trudności ze zrozumieniem lub docenieniem ważności niektórych podnoszonych tu problemów, szczególnie u Czytelnika, którego zainteresowania są dalekie od teorii liczb.

Zacznijmy od definicji funkcji *dzeta Riemanna.*

Zmienną zespoloną oznaczamy przez $s=\sigma+it$, gdzie σ i t są rzeczywiste. W półpłaszczyźnie $\sigma>1$ funkcję dzeta Riemanna definiujemy następująco:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Szereg powyższy jest bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny. W konsekwencji ζ jest funkcją holomorficzną dla $\sigma>1$. Praca Riemanna zawiera szczegółową dyskusję jej podstawowych własności analitycznych. W szczególności dowodzi się tam, że

$$(1) \qquad \xi(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \omega(x)(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}})\,dx,$$

gdzie

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

Γ oznacza funkcję gamma Eulera, a $\omega(x)$ dane jest wzorem

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Ponieważ szereg ten jest szybko zbieżny, całka we wzorze (1) jest bezwzględnie zbieżna dla wszystkich liczb zespolonych s. W połączeniu ze znanymi własnościami funkcji gamma Eulera oznacza to, że *funkcja dzeta Riemanna ma przedłużenie analityczne do funkcji meromorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej. Jej jedyną osobliwością jest biegun pojedynczy w punkcie $s = 1$ z residuum równym* 1. Widać również, że prawa strona równości (1) nie zmienia się przy zamianie s na $1 - s$. W konsekwencji otrzymujemy następujące *równanie funkcyjne* funkcji dzeta Riemanna:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Z równania tego można odczytać, że $\zeta(-2k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Są to tak zwane *zera trywialne* funkcji dzeta Riemanna. Oprócz nich ζ posiada nieskończenie wiele zer zespolonych, które znajdują się w tak zwanym *pasie krytycznym*

$$0 < \sigma < 1.$$

Dla $T > 0$ oznaczmy przez $N(T)$ liczbę nietrywialnych zer leżących w prostokącie $0 < \sigma < 1$, $0 < |t| < T$. Prawdziwa jast następująca *formuła Riemanna–von Mangoldta*:

$$N(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\log T)$$

przy $T \to \infty$ (tutaj, jak i dalszej części tego opracowania, symbol log oznacza logarytm naturalny). Zera nietrywialne leżą symetrycznie względem prostej $\sigma = 1/2$, którą nazywamy *prostą krytyczną*, oraz względem osi rzeczywistej.

Hipoteza Riemanna. *Wszystkie zera nietrywialne leżą na prostej krytycznej.*

Udowodnienie tej hipotezy miałoby bardzo poważne konsekwencje w teorii liczb, o czym będzie mowa w dalszej części (patrz §§ 4 i 5). Odkładając na później dyskusję na ten temat, warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że dowód formuły (1) opiera się na następującej własności funkcji $\theta(x) = 2\omega(x) + 1$:

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\theta(x).$$

Bliższa analiza pokazuje, że równanie funkcyjne dla ζ, w którym s przechodzi na $1 - s$ jest w istocie równoważne powyższemu równaniu funkcyjnemu θ, które wiąże wartości θ w punktach x i $\frac{1}{x}$. Zorientowany Czytelnik rozpozna tu charakterystyczną własność form automorficznych specjalnego typu. Można zatem powiedzieć, że od samego początku teoria funkcji ζ była związana z teorią form automorficznych. Z biegiem lat związek ten odgrywał coraz ważniejszą rolę i w chwili obecnej nie ma już wątpliwości, że ogólna teoria funkcji typu L, będących uogólnieniami funkcji dzeta Riemanna i o których będzie mowa w dalszej części niniejszego artykułu, jest częścią teorii form automorficznych, a ta z kolei częścią teorii reprezentacji grup.

Głównym tematem memoriału Riemanna było wykazanie związku między funkcją ζ a liczbami pierwszymi. Głębokość i nowatorstwo myśli w nim zawartych zasługuje na najwyższy podziw. Z tego względu całkowicie zasłużenie uważa się Riemanna za twórcę teorii funkcji dzeta i jednego z twórców analitycznej teorii liczb. Ponieważ jednak żadna wielka idea nie bierze się z niczego, warto w tym miejscu zwrócić uwagę na wcześniejsze prace Eulera, Dirichleta i Czebyszewa, w których odnajdujemy elementy przyszłej teorii funkcji L.

Eulerowi zawdzięczamy dowód następującej formuły zwanej obecnie *iloczynem Eulera*, która jest punktem wyjścia wszelkich zastosowań funkcji dzeta Riemanna w teorii liczb pierwszych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Jest ona słuszna dla wszystkich liczb zespolonych s o części rzeczywistej większej od 1. Po raz pierwszy pojawiła się w książce Eulera *Introductio in Analysin Infinitorum* wydanej w 1748 roku.

Dirichlet wykazał w 1837 roku swoje słynne twierdzenie mówiące, że *każdy postęp arytmetyczny liczb naturalnych, którego pierwszy wyraz i różnica są względnie pierwsze, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.* Jego dowód opierał się na badaniu analitycznych własności funkcji L omówionych skrótowo w paragrafie 2.1 poniżej.

Punktem wyjścia rozważań Czebyszewa opublikowanych w 1850 roku jest iloczyn Eulera. Czebyszew rozważa logarytm tegoż iloczynu. Używając współczesnego języka można powiedzieć, że badał on zachowanie się funkcji

$$\log((s-1)\zeta(s))$$

w okolicy bieguna funkcji ζ, to znaczy punktu $s = 1$. W rezultacie wykazał, że jeżeli funkcja $\pi(x)$, wyrażająca liczbę liczb pierwszych mniejszych lub równych x tzn. funkcja:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

zachowuje się asymptotycznie przy x dążącym do nieskończoności jak

$$\sum_k a_k \frac{x}{\log^k x},$$

to wtedy $a_k = (k-1)!$. Było to potwierdzenie wcześniejszej obserwacji Gaussa, że logarytm całkowy (por. § 4) daje dobre przybliżenia dla $\pi(x)$. Druga część memoriału Czebyszewa poświęcona jest wyznaczeniu prawidłowego rzędu wzrostu tej funkcji.

Wróćmy do pracy Riemanna. Zasadniczym wynikiem w niej zawartym dotyczącym liczb pierwszych był szkic dowodu wzoru wyrażającego funkcję $\pi(x)$ w terminach nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna. Wynik końcowy sformułujemy w sposób odmienny od oryginalnego, zastępując funkcję π zdefiniowaną poniżej funkcją ψ Czebyszewa.

Jak zauważyliśmy wcześniej, już pobieżna analiza tożsamości Eulera uwidacznia związek między funkcją dzeta Riemanna a liczbami pierwszymi. Logarytmując, a następnie różniczkując obie strony (2) możemy tożsamości Eulera nadać następującą równoważną postać:

(3) $$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

gdzie $\Lambda : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ jest *funkcją von Mangoldta* zdefiniowaną wzorem:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{gdy } n = p^m \ (p - \text{pierwsza}), \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Funkcję ψ *Czebyszewa* definiujemy przy pomocy następującej równości:

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n).$$

Stosując sumowanie częściowe można w elementarny sposób pokazać, że podstawowe własności funkcji π można odczytać z odpowiednich własności funkcji ψ. Tak więc do pewnego stopnia badanie tych dwu funkcji jest równoważne; funkcja ψ jest jednak ze względów technicznych wygodniejsza.

Dla $\sigma > 1$ mamy:

(4) $$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = s \int_2^{\infty} \frac{\psi(t)}{t^{s+1}}\, dt.$$

Stosując do (4) odwrotną transformację Mellina dostajemy

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left\{\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right\}\frac{x^s}{s}\,ds, \qquad x>1, \tag{5}$$

gdzie:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{gdy } x \text{ nie jest potęgą liczby pierwszej,}\\ \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x), & \text{w przeciwnym wypadku.}\end{cases}$$

Odwołując się do znanych własności funkcji dzeta Riemanna, możemy z łatwością zlokalizować osobliwości funkcji podcałkowej w (5). Widać, że są to wyłacznie bieguny pojedyncze pochodzące od zer lub bieguna funkcji dzeta oraz biegun w punkcie $s=0$. Przesuwając kontur całkowania w (5) na lewo i korzystając z twierdzenia o residuach dostajemy następującą *formułę wyraźną Riemanna–von Mangoldta*:

$$\psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right), \qquad x>1, \tag{6}$$

gdzie $\rho = \beta + i\gamma$ przebiega nietrywialne zera funkcji dzeta oraz

$$\sum_\rho = \lim_{T\to\infty}\sum_{|\rho|\leqslant T}.$$

Formuła ta dobitnie wyraża związek między rozmieszczeniem liczb pierwszych a nietrywialnymi zerami funkcji dzeta. Istotnie, po prawej stronie (6) tylko składnik $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$, zależny od zer funkcji $\zeta(s)$, jest odpowiedzialny za wszelkie nieregularności w rozmieszczeniu liczb pierwszych, pozostałe składniki są bowiem funkcjami bardzo „porządnymi" i ich zachowanie jest łatwe do opisu. Mimo, że sam fakt istnienia bliskiego związku między tymi wielkościami nie budzi wątpliwości, wydaje się, że daleko jeszcze do dokładnego zrozumienia i wyczerpującego opisania tych zależności. Jest to zagadnienie o podstawowym znaczeniu i jeszcze do niego wrócimy.

Literatura: [32], [14], [29], [17].

2. Funkcje L w teorii liczb. Jak już wspomniano, funkcja dzeta Riemanna jest elementem obszernej klasy funkcji podobnego typu. Ich teoria jest ściśle związana z teorią form automorficznych, analizą harmoniczną i teorią reprezentacji grup.

Zacznijmy od naszkicowania ogólnej konstrukcji, ryzykując tym, że nie wszystko, co będzie powiedziane, będzie jasne dla mniej zaawansowanego Czytelnika.

Niech p oznacza ∞ lub liczbę pierwszą. Dla każdego p oznaczmy przez $\mathbf{Q}_p$ odpowiednie ciało liczb p-adycznych, przy czym przez $\mathbf{Q}_\infty$ rozumiemy ciało liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. Podzbiór $A_{\mathbf{Q}}$ iloczynu kartezjańskiego

$$\prod_p \mathbf{Q}_p$$

składającego sie z tych ciągów (a_p), których prawie wszystkie wyrazy są liczbami p-adycznymi całkowitymi, nazywamy *pierścieniem adeli* ciała $\mathbf{Q}$. W iloczynie kartezjańskim wprowadzamy topologię produktową Tichonowa, a w $A_{\mathbf{Q}}$ topologię indukowaną. W ten sposób $A_{\mathbf{Q}}$ staje się lokalnie zwartym pierścieniem topologicznym. Dla teorii liczb ważne jest badanie pewnego specjalnego typu reprezentacji (tzw. *reprezentacji automorficznych*) grupy $GL_m(A_{\mathbf{Q}})$, $m \geqslant 1$, nieosobliwych macierzy stopnia m o wyrazach z $A_{\mathbf{Q}}$. Jeżeli π jest taką reprezentacją, to jak można udowodnić, jest ona iloczynem tensorowym odpowiednich czynników lokalnych, to znaczy reprezentacji π_p grup $GL_m(\mathbf{Q}_p)$ dla wszystkich p:

$$\pi = \bigotimes_p \pi_p.$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że teraz symbol π ma inne znaczenie niż w poprzednim paragrafie.

Dla takiego π definiujemy odpowiednią funkcję L poprzez iloczyn będący uogólnieniem iloczynu Eulera dla ζ:

$$L(s,\pi) = \prod_{p<\infty} L(s,\pi_p),$$

gdzie dla liczby pierwszej p odpowiedni czynnik jest postaci

$$L(s,\pi_p) = \prod_{k=1}^{m} (1-\alpha_{k,p}p^{-s})^{-1},$$

przy czym liczby $\alpha_{k,p}$ są zdefiniowane (w dość skomplikowany sposób) w terminach π_p. Dla $p=\infty$ kładziemy

$$L(s,\pi_\infty) = \prod_{k=1}^{m} \left(\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s-\mu_k}{2}\right)\right),$$

przy czym stałe μ_k zależą od π_∞. Analogicznie jak w przypadku funkcji dzeta Riemanna, chociaż trudniej, dowodzi się, że $L(s,\pi)$ jest holomorficzna dla $\sigma>1$ oraz posiada przedłużenie analityczne do funkcji meromorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej. Jedyna osobliwość to biegun skończonego rzędu w $s=1$ (dopuszczamy rząd zerowy bieguna: wtedy funkcja jest całkowita). Ponadto $L(s,\pi)$ spełnia następujące równanie funkcyjne

$$L(s,\widetilde{\pi}_\infty)L(s,\pi) = \omega q^{s-\frac{1}{2}} L(1-s,\widetilde{\pi}_\infty)L(1-s,\widetilde{\pi}),$$

gdzie $\widetilde{\pi}$ jest również reprezentacją automorficzną $GL_m(A_{\mathbf{Q}})$, q jest liczbą naturalną zależną od π, a ω jest liczbą zespoloną o module równym jedności.

Odnotujmy, że podobnie jak w przypadku funkcji dzeta Riemanna, równanie funkcyjne jest konsekwencją automorficzności reprezentacji π.

Podobną konstrukcję można przeprowadzić w przypadku dowolnego ciała liczb algebraicznych, to znaczy skończonego rozszerzenia ciała liczb wymiernych $\mathbf{Q}$. Możliwe są także dalej idące uogólnienia, polegające na tworzeniu jeszcze ogólniejszych funkcji L przy pomocy mnożenia tensorowego.

Dla wszystkich tych funkcji spodziewamy się, że prawdziwa jest *Uogólniona Hipoteza Riemanna*: zera nietrywialne mają części rzeczywiste równe $\frac{1}{2}$.

Warto w tym miejscu wspomnieć o próbach zbudowania aksjomatycznej teorii funkcji L. Szczególnie udana propozycja pochodzi od A. Selberga [30]. Powiemy, że szereg Dirichleta

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

należy do klasy Selberga, gdy jest bezwzględnie zbieżny dla $\sigma > 1$, ma przedłużenie meromorficzne na całą płaszczyznę zespoloną, przy czym jedyną osobliwością jest biegun skończonego rzędu w punkcie $s = 1$. Postuluje się ponadto, że L spełnia równanie funkcyjne z wieloma czynnikami gamma, które wiąże wartości w punktach s i $1 - s$, posiada iloczyn Eulera specjalnego typu oraz spełniony jest tak zwany *warunek Ramanujana* narzucający ograniczenie na wielkość współczynników a_n. Podstawową hipotezą „strukturalną" związaną z tą klasą jest przypuszczenie, że wszystkie jej elementy pochodzą od reprezentacji automorficznych. Przypuszcza się, że Hipoteza Riemanna jest prawdziwa dla wszystkich funkcji L z klasy Selberga i jest to jedno z najogólniejszych sformułowań tej hipotezy.

Dla złagodzenia stopnia abstrakcji opiszmy dokładniej kilka przypadków szczególnych funkcji L.

Literatura: [9], [15], [20], [18].

2.1. *Funkcje L Dirichleta.* Funkcje te są bezpośrednim uogólnieniem funkcji dzeta Riemanna, a z ogólnego punktu widzenia stanowią przykład funkcji L powstających z reprezentacji automorficznych $GL_1(A_{\mathbf{Q}})$. Niech q będzie liczbą naturalną, a χ charakterem Dirichleta (mod q), to znaczy χ jest funkcją określoną dla argumentów całkowitych o wartościach zespolonych i spełniającą następujące warunki ($n, m \in \mathbf{Z}$):

$$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m),$$
$$\chi(n+q) = \chi(n),$$
$$\chi(n) \neq 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad (n, q) = 1.$$

Jeżeli q jest najmniejszym okresem dodatnim χ, to charakter ten nazywamy pierwotnym.

W półpłaszczyźnie $\sigma > 1$ funkcję L Dirichleta definiujemy wzorem

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

przy czym wskaźnik p w iloczynie nieskończonym przebiega zbiór liczb pierwszych. Dowodzi się, że każda z tych funkcji ma przedłużenie analityczne na całą płaszczyznę zespoloną, przy czym dla $q > 1$ oraz charakteru pierwotnego χ jest to funkcja całkowita. Jeżeli $q = 1$, to funkcja L Dirichleta pokrywa się z omawianą wcześniej funkcją dzeta Riemanna. Dla charakteru pierwotnego χ oznaczmy

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+d}{2}} \Gamma\left(\frac{s+d}{2}\right) L(s,\chi),$$

gdzie

$$d = \frac{1}{2}(1 - \chi(-1)).$$

Równanie funkcyjne funkcji L Dirichleta ma postać

$$\xi(s,\chi) = \varepsilon(\chi)\xi(1-s,\overline{\chi}),$$

w którym $\varepsilon(\chi)$ oznacza pewną stałą o module równym jedności. L-funkcje mają zera trywialne w punktach

$$s = -2k - d, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Pozostałe zera to zera nietrywialne leżące w pasie krytycznym. Jak wspomniano wyżej, Uogólniona Hipoteza Riemanna postuluje, że mają one części rzeczywiste równe $\frac{1}{2}$.

Głównym obszarem zastosowań arytmetycznych funkcji L Dirichleta są problemy rozmieszczenia liczb pierwszych w postępach arytmetycznych.

Literatura: [29], [7].

2.2. *Funkcje L ciał algebraicznych.* Niech K oznacza rozszerzenie ciała liczb wymiernych stopnia n, a R_K domknięcie całkowite pierścienia liczb całkowitych w K. Równoważnie, R_K składa się z tych wszystkich elementów ciała K, które są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach całkowitych ze współczynnikiem przy najwyższej potędze równym 1. Pierścień ten jest podstawowym obiektem badań teorii liczb algebraicznych. Jest to pierścień Dedekinda, a więc każdy niezerowy ideał tego pierścienia można przedstawić w postaci iloczynu ideałów niezerowych i takie przedstawienie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników. Dowolny niezerowy ideał $I \subset R_K$ ma skończony indeks, to znaczy pierścień ilorazowy R_K/I ma skończoną liczbę elemetów $N(I)$:

$$N(I) = (R_K : I) = \#(R_K/I).$$

Liczbę $N(I)$ nazywamy *normą* ideału I. Norma jest multyplikatywna, to znaczy

$$N(IJ) = N(I)N(J)$$

dla dowolnych dwóch niezerowych ideałów I i J.

Odpowiednikiem funkcji dzeta Riemanna dla ciała K jest *funkcja dzeta Dedekinda*, którą definiujemy dla $\sigma > 1$ przy pomocy następującego niemal jednostajnie zbieżnego szeregu

$$\zeta_K(s) = \sum_I \frac{1}{N(I)^s},$$

gdzie sumowanie rozciąga się po wszystkich niezerowych ideałach pierścienia R_K. Funkcja ta posiada przedłużenie analityczne do funkcji meromorficznej na całej płaszczyźnie zespolonej. Jej jedyną osobliwością jest biegun pojedynczy w punkcie $s = 1$. Wartość residuum w tym punkcie zależy od podstawowych niezmienników arytmetycznych ciała K i wynosi

$$\kappa_K = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} hR}{m\sqrt{|\Delta|}},$$

gdzie h oznacza liczbę klasową ciała K, R jego regulator, m liczbę pierwiatków z jedynki zawartych w K, a Δ wyróżnik ciała. Wykładnik r_1 oznacza liczbę różnych $\mathbf{Q}$-zanurzeń ciała K w ciało liczb rzeczywistych oraz $r_2 = (n - r_1)/2$. Równanie funkcyjne $\zeta_K(s)$ ma postać

$$\xi_K(s) = \xi_K(1 - s),$$

gdzie

$$\xi_K(s) = \left(\frac{|\Delta|}{4^{r_2}\pi^n}\right)^{s/2} \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)\zeta_K(s).$$

W terminach ogólnej teorii funkcji L funkcja dzeta Dedekinda odpowiada reprezentacji $GL_n(A_{\mathbf{Q}})$.

Istnieją również odpowiedniki L-funkcji Dirichleta dla ciał liczbowych. Są to tak zwane *funkcje dzeta Heckego*, które służą do badania rozmieszczenia ideałów pierwszych w klasach. Istnieją jeszcze ogólniejsze funkcje *dzeta Artina*, których teoria jest o wiele uboższa. Nie wiadomo o nich nawet, czy ich przedłużenie meromorficzne na całą płaszczyznę zespoloną ma skończoną liczbę biegunów. W szczególności nie wiadomo, czy funkcje te pochodzą od reprezentacji automorficznych. Przypuszcza się, że tak. Jest to fragment pewnego zestawu przypuszczeń dotyczącego natury funkcji L znanego pod nazwą *programu Langlandsa.* Odpowiednie uzupełnienie tej teorii miałoby bardzo ważne konsekwencje między innymi w teorii funkcji dzeta Dedekinda.

Badanie powyższych funkcji ma zasadnicze znaczenie dla arytmetyki ciał algebraicznych.

Literatura: [25], [4].

2.3. *Funkcje L form modułowych.* Jest to obszerna klasa funkcji związanych z reprezentacjami automorficznymi $GL_2(A_{\mathbf{Q}})$. Podamy tutaj definicję w szczególnym przypadku funkcji L holomorficznych form modułowych względem pełnej grupy modułowej, to znaczy grupy $SL_2(\mathbf{Z})$ macierzy kwadratowych stopnia 2 o wyznaczniku równym jedności:

$$SL_2(\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{Z},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Odnotujmy, że obecnie termin „forma modułowa” jest często zastępowany przez „formę modularną”.

Oznaczmy przez H górną półpłaszczyznę:

$$H = \{z \in \mathbf{C} : \Im z > 0\}.$$

Funkcję holomorficzną $f : H \to \mathbf{C}$ nazywamy (holomorficzną) modułową formą paraboliczną względem $SL_2(\mathbf{Z})$ wagi k, gdy dla dowolnego $z \in H$ i dowolnej macierzy $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ mamy

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z) \tag{7}$$

oraz f jest „holomorficzna w nieskończoności”, co oznacza, że w półpłaszczyźnie H funkcja ta rozwija się w szereg Fouriera, którego wszystkie współczynniki przy niedodatnich wykładnikach znikają:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Zauważmy, że każda funkcja f transformująca się według formuły (7) jest funkcją okresową o okresie równym 1; wynika to z faktu, że $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$.

Z każdą formą paraboliczną związujemy odpowiednią funkcję L daną szeregiem:

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{k-1}{2}} n^s},$$

który jest bezwzględnie zbieżny dla $\sigma > 1$. Ten ostatni fakt, mimo że wygląda znajomo, jest daleki od trywialności i jest wnioskiem z głębokiego twierdzenia Deligne'a z 1974 roku. Natomiast sprawa przedłużenia analitycznego i równania funkcyjnego nie przedstawia problemu i jest prawie natychmiastowym wnioskiem ze wzoru (7).

W rzeczywistości najważniejsze dla teorii liczb jest badanie form modułowych i ich funkcji L nie tylko względem pełnej grupy modułowej $SL_2(\mathbf{Z})$, lecz także względem pewnych jej podgrup.

Przykładem holomorficznej formy modułowej dla $SL_2(\mathbf{Z})$ wagi 12 jest:

$$\Delta(z) = q \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n)^{24},$$

gdzie $q = e^{2\pi i z}$. Oznaczmy przez $\tau(n)$ jej współczynniki Fouriera:

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

Funkcja τ znana jest jako *funkcja Ramanujana.* Automorficzność Δ wyraża się formułą:

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\Delta(z), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(Z).$$

Odpowiednia funkcja L ma postać:

$$L(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{11/2} n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\tau(p)}{p^{11/2}} p^{-s} + p^{-2s}\right)^{-1}.$$

Jeżeli funkcja L formy modułowej ma iloczyn Eulera (podobnego typu jak $L(s, \Delta)$), to spodziewamy się, że jej nietrywialne zera leżą na jednej prostej pionowej. Inaczej mówiąc dla takich funkcji prawdziwa jest Uogólniona Hipoteza Riemanna.

Literatura: [13], [22].

3. Funkcje L w geometrii algebraicznej. Niech X będzie dowolną rzutową rozmaitością algebraiczną wymiaru n nad domknięciem algebraicznym ciała skończonego F_p. Dla $m \geqslant 1$ oznaczmy przez N_{p^m} liczbę F_{p^m}-wymiernych punktów na rozmaitości X. Funkcję L określamy następującym szeregiem

$$Z(X, u) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_{p^m} \frac{u^m}{m}\right) \in \mathbf{Q}[[u]].$$

Rozważając wiele przypadków szczególnych, A. Weil ([33], [34]), sformułował następujące przypuszczenia.

(1) Funkcja $Z(X, u)$ jest funkcją wymierną zmiennej u:

$$Z(X, u) = \frac{\prod_{k=0}^{n} P_{2k+1}(u)}{\prod_{k=0}^{n} P_{2k}(u)},$$

gdzie P_j są wielomianami o współczynnikach całkowitych. Ponadto

$$P_0(u) = 1 - u, \qquad P_{2n}(u) = 1 - p^n u.$$

(2) Funkcja $Z(X, u)$ spełnia następujące równanie funkcyjne

$$Z\left(X, \frac{1}{p^n u}\right) = \pm p^{\frac{nE}{2}} u^E Z(X, u),$$

gdzie E jest pewną liczbą naturalną (równą indeksowi samoprzecięcia przekątnej iloczynu kartezjańskiego $X \times X$).

(3) *Hipoteza Riemanna*: Dla $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$ mamy

$$P_i(u) = \prod_{j=1}^{B_i} (1 - \alpha_{ij} u),$$

przy czym α_{ij} są całkowitymi liczbami algebraicznymi oraz

$$|\alpha_{ij}| = p^{i/2}.$$

(4) Zakładając, że istnieje ciało liczb algebraicznych K takie, że nasza rozmaitość X jest redukcją modulo ideał pierwszy pierścienia R_K pewnej rozmaitości Y, otrzymujemy, że $B_j = \deg P_j$ jest j-tą liczbą Bettiego zespolonej rozmaitości analitycznej

$$Y_h = (Y \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C})_h,$$

to znaczy $B_i = \operatorname{rank}_{\mathbf{Z}} H^i(Y, \mathbf{Z})$. (Dokładną definicję Y_h pomijamy.)

Punkt (3) wymaga komentarza. Dla ustalenia uwagi niech X będzie krzywą algebraiczną rodzaju g. Mamy wtedy $n = 1$. Jeżeli zachodzi (1), to możemy napisać

$$Z(X, u) = \frac{P(u)}{(1-u)(1-pu)},$$

gdzie P jest wielomianem stopnia $2g$. Hipoteza (3) postuluje, że

$$P(u) = \prod_{j=1}^{2g} (1 - \alpha_j u), \qquad |\alpha_j| = \sqrt{p}.$$

Aby dostrzec podobieństwo tej hipotezy z omawianą wcześniej Hipotezą Riemanna dla funkcji L, wprowadźmy nową funkcję zmiennej zespolonej s:

$$L(s, X) = Z(X, p^s).$$

Widać teraz, że hipotezę (3) można sformułować następująco: *wszystkie zera $L(s, X)$ leżą na prostej $\sigma = 1/2$.*

Szczególnym przypadkiem rozmaitości algebraicznych są krzywe eliptyczne (nieosobliwe krzywe abelowe rodzaju pierwszego). Prawdziwość hipotez Weila dla tego przypadku szczególnego wynika z klasycznych twierdzeń teorii liczb. W szczególności Hipoteza Riemanna została wykazana przez Hassego. Sam Weil pokazał, że są one prawdziwe dla dowolnych krzywych algebraicznych.

Funkcje L rozmaitości algebraicznych mają interpretację kohomologiczną. Weil dobrze zdawał sobie sprawę z faktu, że kluczem do zrozumienia głębszych własności tych funkcji jest znalezienie odpowiedniej teorii kohomologii. Wyjaśnijmy pokrótce dlaczego tak jest. Punktem wyjścia jest klasyczne *twierdzenie Lefschetza*, które mówi, że jeżeli $f : X \to X$ jest ciągłym przekształceniem n-wymiarowej zwartej rozmaitości topologicznej, którego wszystkie punkty stałe są izolowane, to

$$\sum_{f(x)=x} i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Tr}(f^*, H^i(X, \mathbf{Q})),$$

gdzie $i(x)$ oznacza krotność f w punkcie x, $H^i(X, \mathbf{Q})$ oznacza i-tą grupę kohomologii o współczynnikach w $\mathbf{Q}$ przestrzeni X (która ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb wymiernych), a f^* jest jej endomorfizmem indukowanym przez f. Wzór ten wyraża zatem liczbę punktów stałych odwzorowania f liczoną wraz z odpowiednimi krotnościami w języku grup kohomologii. W interesującej nas sytuacji, gdy X jest rozmaitością algebraiczną nad ciałem skończonym, mamy w naturalny sposób określone odwzorowanie $f : X \to X$, tak zwany *automorfizm Frobeniusa*:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_0^p, x_1^p, \ldots, x_n^p).$$

Łatwo wtedy stwierdzić, że F_{p^m}-wymierne punkty X są to dokładnie punkty stałe m-krotnego złożenia f ze sobą:

$$N_{p^m} = \text{liczba punktów stałych } f^m.$$

Załóżmy, że istnieje teoria kohomologii na X, dla której zachodzi odpowiednik twierdzenia Lefschetza oraz taka, że

$$H^i(X) = 0 \qquad \text{dla } i > 2n.$$

Wtedy

$$N_{p^m} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \mathrm{Tr}((f^m)^*, H^i(X))$$

i w konsekwencji

$$Z(X, u) = \prod_{i=0}^{2n} \left[\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}((f^m)^*, H^i(X)) \frac{u^m}{m} \right) \right]^{(-1)^i}.$$

Jeżeli grupy $H^i(X)$ mają dodatkową strukturę przestrzeni liniowych, to można teraz skorzystać z następującego elementarnego faktu znanego z algebry: dla dowolnego endomorfizmu φ skończenie wymiarowej przestrzeni V nad ciałem K mamy

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(\varphi^m) \frac{u^m}{m} \right) = \det(1 - \varphi u)^{-1}.$$

Stąd dostajemy

$$Z(X, u) = \frac{P_1(u) P_3(u) \ldots P_{2n-1}(u)}{P_0(u) P_2(u) \ldots P_{2n}(u)}, \tag{8}$$

gdzie

$$P_i(u) = \det(1 - f^*u, H^i(X)),$$

i, jak poprzednio, f^* oznacza odwzorowanie indukowane na grupach kohomologii przez automorfizm Frobeniusa. W ten sposób wymierność funkcji L wynika z hipotetycznych własności kohomologii.

W istocie wynika stąd jeszcze więcej, a mianowicie równość

$$\deg P_i = \dim H^i(X),$$

co jest już bardzo bliskie interpretacji stopni wielomianów P_i jako odpowiednich liczb Bettiego.

W „dostatecznie dobrej” teorii kohomologii powinien istnieć $\cup$-produkt

$$H^i(X) \times H^k(X) \to H^{i+k}(X).$$

Załóżmy, że $\dim H^{2n}(X) = 1$, a więc $H^{2n}(X)$ jest izomorficzna jako przestrzeń liniowa z ciałem, nad którym jest określona, oraz że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 2n$ odwzorowanie

$$H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \to H^{2n}(X)$$

jest niezdegenerowanym odwzorowaniem dwuliniowym. Można wtedy skorzystać z następującego *lematu Poincarégo*: jeżeli

$$F : V \times W \to K$$

jest niezdegenerowanym odwzorowaniem dwuliniowym pary przestrzeni liniowych nad ciałem K, $\dim W = d$, i jeżeli $\varphi \in End(V)$, $\psi \in End(W)$ oraz $\lambda \in K$ są takie, że

$$F(\varphi v, \psi w) = \lambda F(v, w)$$

dla wszystkich $(v, w) \in V \times W$, to

$$\det(1 - \psi u, W) = \frac{(-1)^d \lambda^d u^d}{\det(\varphi, V)} \det\left(1 - \frac{\varphi}{\lambda u}, V\right),$$

a także

$$\det(\varphi, W) = \frac{\lambda^d}{\det(\varphi, V)}.$$

Stosując ten lemat dla $V = H^i(X)$, $W = H^{2n-i}(X)$, $\varphi = f^*_{H^i}$, $\psi = f^*_{H^{2n-1}}$ (endomorfizmy indukowane przez automorfizm Frobeniusa na odpowiednich przestrzeniach kohomologii) i zakładając, że złożenie φ i ψ z $\cup$-produktem jest identyczne z mnożeniem przez skalar $\lambda = p^n$ wektorów jednowymiarowej przestrzeni $H^{2n}(X)$, dostajemy ($B_i = \dim H^i(X)$):

$$P_{2n-i}(u) = \det(1 - f^*u, H^{2n-i}(X)) = (-1)^{B_i} \frac{p^{nB_i} u^{B_i}}{\det(f^*, H^i(X))} P_i\left(\frac{1}{p^n u}\right).$$

Podstawiając to do (8) otrzymujemy

$$Z(X,u) = \underline{+}p^{-\frac{n}{2}E}u^{-E}Z\left(X, \frac{1}{p^n u}\right),$$

gdzie

$$E = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i B_i,$$

co daje równanie funkcyjne dla $Z(X,u)$ w postaci przewidywanej przez Weila.

Prace nad dowodami hipotez Weila koncentrowały się na poszukiwaniu właściwej teorii kohomologii. Istnieje obecnie kilka równoważnych konstrukcji. Dobrą teorię dają tak zwane *kohomologie l-adyczne.* Niech $l \neq p$ będzie liczbą pierwszą oraz niech $\mathbf{Q}_l$ oznacza ciało liczb l-adycznych. Wtedy l-adyczne grupy kohomologii określamy wzorem

$$H^i(X, \mathbf{Q}_l) = (\varprojlim H^i_{et}(X, \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l,$$

przy czym X rozważamy wraz z topologią etalną, a $H^i_{et}(X, \mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z})$ są grupami kohomologii etalnych o współczynnikach z $\mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z}$. Opis szczegółów tej konstrukcji i dowód, że nadaje się ona do naszych celów, wykracza poza skromne ramy tego artykułu.

Dowód Hipotezy Riemanna dla $Z(X,u)$ jest znacznie trudniejszy od dowodu pozostałych hipotez Weila. Zawdzięczamy go P. Deligne'owi [8]. Było to duże osiągnięcie, nagrodzone zresztą Medalem Fieldsa w roku 1978. Warto zaznaczyć, że dowód Hipotezy Riemanna dla krzywych algebraicznych może być przeprowadzony bez użycia kohomologii (Stepanov–Bombieri [2]).

Udowodnienie Hipotezy Riemanna dla funkcji dzeta rozmaitości algebraicznych ma pewne ważne konsekwencje w teorii wymiernych sum trygonometrycznych, a więc także w teorii kongruencji. Niech F będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych stopnia k. Załóżmy ponadto, że jego redukcja (mod$p$) nie jest wielomianem zerowym. Wtedy

$$\left|\sum_{a=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i F(a)}{p}}\right| \leqslant (k-1)\sqrt{p}.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla wielomianów wielu zmiennych. Wynika stąd, że *liczba rozwiązań kongruencji*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p,$$

gdzie F jest bezwzględnie nierozkładalnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, jest równa

$$p^{n-1} + O_F(p^{n-3/2})$$

(diofantyczna postać Hipotezy Riemanna).

Innym ważnym zastosowaniem są oszacowania z góry współczynników Fouriera form modułowych, w szczególności uzyskujemy dowód następującej *Hipotezy Petersona–Ramanujana.* Dla funkcji τ określonej w § 2.3 mamy

$$|\tau(n)| \leqslant d(n)n^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $d(n)$ oznacza jak zwykle liczbę dzielników naturalnych liczby n.

To co zostało powiedziane powyżej na temat funkcji L w geometrii algebraicznej odpowiada, mówiąc nieprecyzyjnie, czynnikom „lokalnym” w iloczynie Eulera. Poprzez ich wymnożenie dochodzimy do pojęcia „globalnej” funkcji L. Jeżeli X jest rozmaitością algebraiczną określoną przez układ równań wielomianowych o współczynnikach całkowitych, to dla prawie wszystkich liczb pierwszych p mamy dobrze określoną rozmaitość nad ciałem reszt (mod p), którą oznaczamy przez X_p. *Globalną funkcją* L rozmaitości X określamy poprzez iloczyn typu eulerowskiego

$$L(s, X) = \prod_p \widetilde{L}(s, X_p),$$

przy czym p przebiega zbiór tych liczb pierwszych, dla których X_p jest poprawnie określona. Funkcja $\widetilde{L}(s, X_p)$ jest „interesującą częścią” $L(s, X_p)$ (szczegóły pomijamy). O analitycznej naturze tych funkcji wiadomo bardzo mało. Konstrukcja przedłużenia analitycznego i wyznaczenie równania funkcyjnego jest w tym przypadku zagadnieniem bardzo skomplikowanym. Wspomniany wcześniej program Langlandsa przewiduje, że wszystkie te funkcje pochodzą od reprezentacji automorficznych. Niedawno A. Wiles [35] udowodnił szczególny przypadek tej hipotezy wykazując, że globalna funkcja L wymiernej krzywej eliptycznej pokrywa się z pewną funkcją L formy modułowej wagi 2 (z dokładnością do skończonej liczby czynników w iloczynie Eulera) i w związku z tym ma przedłużenie analityczne do funkcji całkowitej. Wynik ten ma bardzo ciekawą konsekwencję arytmetyczną, wynika z niego bowiem Wielkie Twierdzenie Fermata.

Literatura: [10], [9], [15], [20].

4. Dlaczego Hipoteza Riemanna jest ważna? Hipoteza Riemanna jest ważna ze względu na swoje liczne i głębokie konsekwencje. Jej udowodnienie spowodowałoby istotną przebudowę znacznej części teorii liczb, przede wszystkim tej, w której wykorzystuje się metody analityczne. Znaczna część istniejącej obecnie analitycznej teorii liczb została stworzona po to, aby radzić sobie bez Hipotezy Riemanna lub aby (czasami w dość zawiły sposób) dowodzić słabszych wersji wniosków z Hipotezy Riemanna, dysponując niepełną wiedzą dotyczącą rozmieszczenia części rzeczywistych zer nietrywialnych. Udowodnienie Hipotezy Riemanna uprościłoby dramatycznie dowody istniejących twierdzeń i w zdecydowanej większości przypadków pozwoliłoby na ich wzmocnienie.

Najbardziej bezpośrednie konsekwencje Hipotezy Riemanna dotyczą rozmieszczenia liczb pierwszych. Słynne *Twierdzenie o Liczbach Pierwszych* mówi, że

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + R(x),$$

gdzie $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych w przedziale $[2, x]$, $\mathrm{li}(x)$ oznacza *logarytm całkowy* z x:

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \Big) \frac{du}{\log u},$$

natomiast $R(x)$ jest resztą rzędu

$$O(x \exp(C(\log x)^{3/5} (\log\log x)^{-1/5})$$

dla pewnej stałej dodatniej C. Mamy następujące rozwinięcie asymptotyczne przy $x \to \infty$:

$$\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x} + 1!\frac{x}{\log^2 x} + 2!\frac{x}{\log^3 x} \dots$$

W szczególności wynika stąd, że

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Twierdzenie to rozstrzyga problem rzędu wzrostu funkcji $\pi(x)$ przy x dążącym do nieskończoności. Subtelniejsze informacje o tym, jak liczby pierwsze położone są w ciągu liczb naturalnych odzwierciedlane są przez zachowanie się funkcji $R(x)$. Ta funkcja z kolei może być wyrażona przy pomocy zer funkcji dzeta Riemanna i staje się jasne, że wszelka informacja o lokalizacji tych zer ma duże znaczenia z tego punktu widzenia. W szczególności Hipoteza Riemanna pozwoliłaby na dowód tego, że

$$R(x) = O(\sqrt{x}\log x).$$

W istocie to ostatnie oszacowanie implikuje prawdziwość Hipotezy Riemanna; są to zatem stwierdzenia równoważne. Można więc powiedzieć, że oszacowanie reszty w twierdzeniu o liczbach pierwszych rzędu $O(\sqrt{x}\log x)$ jest arytmetyczną wersją Hipotezy Riemanna. Takich czysto arytmetycznych sformułowań Ripotezy Riemanna jest dużo. Dla przykładu Hipoteza Riemanna równoważna jest następującemu oszacowaniu:

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O(x^{1/2+\varepsilon})$$

(dla dowolnego $\varepsilon > 0$), gdzie μ oznacza tak zwaną funkcję Möbiusa:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ (-1)^r & \text{dla } n = p_1 \dots p_r,\ p_i \text{ – parami różne}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wróćmy do liczb pierwszych. Oczywiście Uogólniona Hipoteza Riemanna dla funkcji L Dirichleta ma konsekwencje w teorii rozmieszczenia liczb pierwszych w postępach arytmetycznych. Dla przykładu reszta w twierdzeniu Dirichleta o liczbach pierwszych, to znaczy wyrażenie

$$\pi(x,q,a) - \frac{1}{\phi(q)}\mathrm{li}(x),$$

gdzie $\pi(x,q,a)$ oznacza liczbę liczb pierwszych w postępie arytmetycznym

$$a, a+q, a+2q, a+3q, \ldots$$

($a, q \geqslant 1$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, $\phi(q)$ jest równe liczbie liczb $1 \leqslant a \leqslant q$ względnie pierwszych z q), może być oszacowana przez $c_0 x^{1/2}\log(qx)$ jednostajnie przy $x \geqslant 1$, $1 \leqslant q \leqslant x$. Występująca tu stała c_0 jest czysto numeryczna, w szczególności nie zależy od x, q i a. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na jednostajność powyższego oszacowania względem modułu q. Jest to fakt doniosły, który ma ważne konsekwencje. Opisana sytuacja jest bardzo szczególnym przypadkiem znacznie ogólniejszego *twierdzenia Czebotariewa o gęstości.* Niech L/K oznacza rozszerzenie normalne ciał algebraicznych z grupą Galois G. Dla dowolnego nierozgałęzionego ideału pierwszego p ciała K, niech

$$\sigma_p = \left[\frac{L/K}{p}\right]$$

oznacza symbol Artina związany z p. Jest to klasa elementów sprzężonych przez automorfizmy wewnętrzne w G. Dla dowolnej takiej klasy C niech $\pi(x, L/K, C)$ oznacza liczbę ideałów pierwszych p o normach nie przekraczających x i takich, że

$$\sigma_p = C.$$

Twierdzenie Czebotariewa mówi, że $\pi(x, L/K, C)$ przy x dążącym do nieskończoności jest asymptotycznie równe

$$\frac{\#C}{\#G}\mathrm{li}(x).$$

Odpowiednio uogólniona Hipoteza Riemanna pozwala na uzyskanie bardzo silnego oszacowania członu resztowego w tym twierdzeniu przy jednoczesnej bardzo dobrej zależności od parametrów ciał K i L ([28]):

$$\left|\pi(x, L/K, C) - \frac{\#C}{\#G}\mathrm{li}(x)\right| \leqslant c_1\left(\frac{\#C}{\#G}x^{1/2}\log(\varDelta_L x^{n_L}) + \log\varDelta_L\right)$$

jednostajnie dla $x > 2$. W powyższej nierówności $\varDelta_L$ oznacza wyróżnik ciała L, a n_L jego stopień. Ponownie zwróćmy uwagę na dobrą zależność powyższych oszacowań od parametrów ciał. Pozwala to na uzyskanie szeregu cennych wniosków. Jednym z nich jest stwierdzenie, że Uogólniona Hipoteza Riemanna (dla funkcji dzeta Dedekinda) pociąga za sobą prawdziwość następującej *Hipotezy Artina*. Niech a będzie liczbą całkowitą różną od -1 i nie będącą kwadratem liczby całkowitej, niech $N_a(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych $p \leqslant x$, dla których a jest pierwiastkiem pierwotnym (mod p), to znaczy takich, że reszta a (mod p) generuje grupę reszt $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Wtedy granica

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_a(x)}{\pi(x)}$$

istnieje i jest dodatnia ([11]).

Inna ciekawa konsekwencja Hipotezy Riemanna dotyczy informatyki, a ściślej biorąc tak zwanych *testów pierwszości*. Chodzi o następujące zagadnienie: dana jest liczba naturalna n. Jak sprawdzić, czy jest ona pierwsza? Oczywiście dla małych n kolejne dzielenie przez liczby naturalne nie przekraczające $\sqrt{n}$ załatwia sprawę. Jeśli jednak nasza liczba ma kilkaset cyfr, sprawa staje się znacznie bardziej skomplikowana z praktycznego punktu widzenia. Zagadnienie to nabrało w ostatnich latach na znaczeniu ze względu na to, że duże liczby pierwsze używane są w wielu systemach zapewniających bezpieczeństwo sieci komputerowych. Szczególnie cenne są te algorytmy sprawdzające pierwszość, które działają szybko. Otóż zakładając prawdziwość Uogólnionej Hipotezy Riemanna, G. L. Miller [21] skonstruował test pierwszości, który działa w czasie wielomianowym.

Listę ciekawych konsekwencji Hipotezy Riemanna można przedłużać niemal w nieskończoność.

Literatura: [29], [32], [16].

5. Co wiadomo? Dla ustalenia uwagi ograniczymy się tutaj do omówienia niektórych znanych faktów dotyczących funkcji dzeta Riemanna i funkcji L Dirichleta. Duża ich część ma odpowiedniki dla innych funkcji L, przy czym dowody z reguły komplikują się w miarę wzrostu poziomu abstrakcji.

Ważne konsekwencje arytmetyczne mają następujące hipotezy, których prawdziwość wynika z Hipotezy Riemanna:

Hipoteza Lindelöfa. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\varepsilon})$$

przy t dążącym do nieskończoności.

Hipoteza Gęstościowa. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnych $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ i $T \geqslant 2$, mamy

$$N(\sigma, T) = O(T^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)}),$$

gdzie $N(\sigma, T)$ oznacza liczbę zer funkcji dzeta Riemanna w obszarze

$$\Re s \geqslant \sigma, \qquad |\Im s| \leqslant T.$$

Wiadomo, że prawdziwość Hipotezy Lindelöfa pociąga za sobą prawdziwość Hipotezy Gęstościowej. Miarą tego, jak daleko znajdujemy się w chwili obecnej od dowodu tych hipotez, a więc pośrednio także od dowodu Hipotezy Riemanna, jest fakt, iż najlepsza ze znanych metod szacowania rzędu wzrostu funkcji dzeta Riemanna na prostej krytycznej, pochodząca od E. Bombieriego i H. Iwańca, pozwoliła tym autorom na uzyskanie następującego wyniku (por. [3]):

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(t^{9/56}).$$

W nieopublikowanej jeszcze pracy M. N. Huxley dowodzi, że wykładnik może być zredukowany do 32/205. Wiadomo, że Hipoteza Gęstościowa jest prawdziwa w ograniczonym zakresie, a mianowicie dla $\sigma \geqslant 25/32$ (por. [1]).

Najsilniejsze ze znanych oszacowań typu

$$N(\sigma,T) = O(T^{(\alpha+\varepsilon)(1-\sigma)}),$$

zachodzące dla wszystkich $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ zostało uzyskane w [12] i zachodzi dla

$$\alpha = \frac{12}{5}.$$

Ważną artymetyczną konsekwencją ostatniego wyniku jest stwierdzenie, że każdy przedział postaci $[x, x+h]$, przy dostatecznie dużym x i $h \geqslant x^{7/12+\varepsilon}$ zawiera w przybliżeniu $h/\log x$ liczb pierwszych. Hipoteza Gęstościowa, a więc również Hipoteza Riemanna, implikuje, że powyższe stwierdzenie pozostaje prawdziwe również wtedy, gdy 7/12 zastąpimy przez 1/2.

W związku z zagadnieniem szacowania gęstości zer nietrywialnych na uwagę zasługuje następujące oszacowanie A. Selberga ([30]):

$$N(\sigma,T) = O(T^{1-\frac{1}{4}(\sigma-\frac{1}{2})}\log T) \tag{9}$$

dla wszystkich $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$. Wynika stąd natychmiast, że *dla dowolnej funkcji g dążącej do nieskończoności przy $T \to \infty$ prawie wszystkie* (*w sensie gęstości*) *nietrywialne zera funkcji dzeta Riemanna leżą w obszarze*

$$\left|\frac{1}{2}-\sigma\right| \leqslant \frac{g(|t|)}{\log(|t|+2)}.$$

Jest to całkowicie zgodne z tym, co przewiduje Hipoteza Riemanna.

Oznaczmy przez $N_0(T)$ liczbę zer postaci

$$\rho = \frac{1}{2}+i\gamma, \qquad |\gamma| \leqslant T. \tag{10}$$

Hipoteza Riemanna jest równoważna stwierdzeniu, że $N_0(T) = N(T)$ dla każdego $T > 0$. Sensowne jest więc badanie wielkości

$$n_0 = \liminf_{T\to\infty} \frac{N_0(T)}{N(T)}.$$

Można wykazać ([5]), że $n_0 \geqslant 0.4088$. Dla analogicznej stałej

$$n_0^* = \liminf_{T\to\infty} \frac{N_0^*(T)}{N(T)},$$

gdzie $N_0^*(T)$ oznacza liczbę zer *pojedynczych* w prostokącie (10), prawdziwe jest nieco słabsze oszacowanie

$$n_0^* \geqslant 0.401.$$

Zatem *więcej niż* 2/5 *nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna jest pojedynczych i leży na prostej krytycznej.* Przypuszcza się, że wszystkie zera $\zeta(s)$ są pojedyncze, ale nie jest jasne, czy stwierdzenie to wynika z Hipotezy Riemanna.

Istotne jest także znajdywanie coraz większych obszarów pasa krytycznego wolnych od zer. Jest to zagadnienie równoważne szacowaniu od góry reszty w twierdzeniu o liczbach pierwszych. Najlepszy znany wynik w tym zakresie stwierdza, że funkcja dzeta Riemanna nie ma zer w obszarze

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log^{2/3}(|t|+10)\log\log(|t|+10)},$$

gdzie c jest pewną stałą dodatnią (*twierdzenie I. M. Winogradowa-Korobowa*). Nie jest to wynik jakiego należałoby oczekiwać, gdyż granica tego obszaru wraz ze wzrostem $|t|$ zbliża się do prostej $\sigma = 1$ zamiast do prostej krytycznej. Prawdopodobnie jest to spowodowane niedoskonałością znanych nam metod.

Jak już stwierdziliśmy wcześniej, wiele z powyższych wyników ma odpowiedniki dla funkcji L Dirichleta i funkcji dzeta Dedekinda, chociaż rezultaty uzyskane w ogólniejszej sytuacji są znacząco słabsze. Na przykład nie wiemy, czy oszacowanie (9) jest prawdziwe dla dowolnej funkcji dzeta Dedekinda. Nie wiemy, czy dla tych funkcji „dodatnia część” nietrywialnych zer leży na prostej krytycznej, co więcej nie wiadomo nawet, czy na tej prostej leży przynajmniej jedno takie zero. Nie wiemy także, czy każda funkcja dzeta Dedekinda posiada przynajmniej jedno zero pojedyncze.

Trudnym problemem dotyczącym zer funkcji L Dirichleta jest zagadnienie istnienia nietrywialnych zer rzeczywistych. Dla funkcji dzeta Riemanna łatwo pokazać, że takich zer nie ma. W ogólnej sytuacji przypuszcza się, że jedynym nietrywialnym zerem rzeczywistym może być punkt 1/2. To przypuszczenie nie zostało do tej pory udowodnione mimo licznych prób. Zagadnienie bowiem jest niezwykle ważne ze względu na swoje konsekwencje w teorii rozmieszczenia liczb pierwszych w postępach arytmetycznych i w arytmetyce ciał kwadratowych.

Sporo natomiast wiadomo o zerach funkcji L Dirichleta „w średniej”. Niech χ będzie charakterem Dirichleta oraz

$$N(\sigma, T, \chi) = \#\{\rho = \beta + i\gamma : \beta \geqslant \sigma,\ |\gamma| \leqslant T,\ L(\rho,\chi) = 0\}.$$

Jakkolwiek o tych wielkościach dla ustalonego χ wiemy mniej niż w przypadku funkcji dzeta Riemanna, to można uzyskać silne oszacowania dla sum postaci

$$N(\sigma,T,Q)=\sum_{q\leqslant Q}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)} N(\sigma,T,Q),$$

gdzie $*$ przy znaku sumy oznacza, że ograniczamy się do składników odpowiadających charakterom pierwotnym (mod q). Wyniki uzyskano stosując wielkie sito Linnika. Typowy rezultat może być sformułowany następująco ([23]):

$$N(\sigma,T,Q)=O((Q^2T)^{w(\sigma)}\log^{14}(QT))\qquad (T\geqslant 2),$$

gdzie

$$w(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{3(1-\sigma)}{(2-\sigma)} & \text{dla } \dfrac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant\dfrac{4}{5},\\[2ex] \dfrac{2(1-\sigma)}{\sigma} & \text{dla } \dfrac{4}{5}\leqslant\sigma\leqslant 1.\end{cases}$$

Podstawiając $T=Q$, $\sigma=\frac{4}{5}$ otrzymujemy

$$N\left(\frac{4}{5},Q,Q\right)=O(Q^{\frac{3}{2}}\log^{14}Q).$$

Stąd łatwo wynika, że *dla wszystkich funkcji L Dirichleta z charakterami pierwotnymi* χ (mod q), $q\leqslant Q$, *z wyjątkiem co najwyżej* $O(Q^{3/2}\log^{14}Q)$ *z nich*, *mamy*

$$L(s,\chi)\neq 0\qquad \text{dla } \sigma\geqslant\frac{4}{5}\ \text{i}\ |t|\leqslant Q.$$

A zatem hipoteza quasi-riemannowska jest słuszna dla „prawie wszystkich” funkcji L.

Metoda wielkiego sita pozwala na wykazanie następującego ważnego twierdzenie *Bombieriego–Winogradowa*, [23] ([7]). Dla liczby naturalnej q i rzeczywistego $x\geqslant 1$ kładziemy:

$$E(x,q)=\max\left|\psi(x,q,a)-\frac{x}{\varphi(q)}\right|,$$

przy czym maksimum jest wzięte po wszystkich a, $1\leqslant a\leqslant q$, względnie pierwszych z q. Ponadto niech

$$E^*(x,q)=\max_{y\leqslant x}E(y,q).$$

Przy tych oznaczeniach twierdzenie Bombieriego–Winogradowa mówi, że dla dowolnego ustalonego $A>0$ mamy

$$\sum_{q\leqslant Q}E^*(x,q)=O(x\log^{-B}x)$$

dla dowolnego $Q \leqslant x^{1/2}(\log x)^{-3A-23}$. W wielu sytuacjach szczególnych twierdzenie to daje takie same wyniki, jak użycie Hipotezy Riemanna dla funkcji L Dirichleta – stąd jego wartość.

Numeryczne testowanie Hipotezy Riemanna stanowi wyzwanie dla sprzętu komputerowego i jest jednocześnie dobrym sprawdzianem efektywności stosowanych algorytmów. Do chwili pisania niniejszego artykułu potwierdzono, że sto miliardów zer funkcji dzeta Riemanna leży na prostej krytycznej. Rzecz jasna nie odkryto żadnych zer leżących poza tą prostą. Testowanie numeryczne Hipotezy Riemanna może przebiegać według następującego algorytmu. Załóżmy, że naszym celem jest weryfikacja hipotezy dla zer nietrywialnych o częściach urojonych z przedziału $(0, T)$ dla pewnego dodatniego T. Najpierw obliczamy liczbę $N(T)$ wszystkich zer nietrywialnych w prostokącie $0 < \Re s < 1$, $0 < \Im s < T$. Można to zrobić na przykład numerycznie całkując funkcję ζ'/ζ po brzegu tego prostokąta. Następnie wybieramy punkty

$$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{N(T)} < T$$

w ten sposób, aby funkcja $f(t) = \xi(1/2 + it)$ w kolejnych punktach przyjmowała wartości o przeciwnych znakach. Pamiętajmy, że ze względu na równanie funkcyjne wartości $f(t)$ są rzeczywiste dla rzeczywistych t. Jeżeli dla ustalonego T potrafimy wskazać punkty o powyższych własnościach, to znaczy, że wszystkie nietrywialne zera funkcji dzeta Riemanna leżą na prostej krytycznej i, dodatkowo, są pojedyncze.

6. Czy Hipoteza Riemanna jest prawdziwa? Tego nadal nie wiemy. Pewne jest natomiast to, że dziś istnieje więcej argumentów za niż przeciw.

Poważnym argumentem za prawdziwością Hipotezy Riemanna są obliczenia numeryczne, o których była mowa wcześniej.

Natomiast najpoważniejszym argumentem teoretycznym są bez wątpliwości wyniki uzyskane dla rozmaitości algebraicznych. Prowadzone są obecnie badania mające na celu przeniesienie metod, które okazały się tam skuteczne, na przypadek funkcji dzeta Riemanna lub szerzej, na przypadek ogólnych funkcji L. Być może właściwą drogą okaże się konstrukcja odpowiedniej teorii kohomologii i zinterpretowanie funkcji L w tym języku. Dowód Deligne'a ma jedną bardzo charakterystyczną cechę: mianowicie nie operuje pojedynczą funkcją L, lecz pewną rodziną takich funkcji. Przypuszcza się, że przyszły dowód Hipotezy Riemanna będzie miał podobny charakter. Ta bardzo ogólna myśl ma całkiem konkretne zastosowania. Korzyść płynącą z rozpatrywania rodzin funkcji L widać na przykład w omawianych w § 5 oszacowaniach gęstości zer „w średniej". Znanych jest także wiele twierdzeń dotyczących pojedynczej funkcji L, które zostały udowodnione poprzez rozpatrywanie jej jako elementu odpowiedniej rodziny. Stąd rosnące zainteresowanie rodzinami funkcji L, w tym na przykład klasą Selberga.

Równolegle trwają prace nad spektralną interpretacją nietrywialnych zer funkcji L. Obliczenia numeryczne potwierdzają ze zdumiewającą dokładnością ideę, pochodzącą od Hilberta, że nietrywialne zera funkcji dzeta są wartościami własnymi pewnego operatora działającego w odpowiedniej przestrzeni Hilberta ([27]). Program ten nigdy nie został precyzyjnie sformułowany i pozostaje do dziś w sferze dość luźno ze sobą powiązanych spekulacji. Nie wiadomo o jaką przestrzeń może tutaj chodzić, ani tym bardziej o jaki operator. Wykorzystując znane własności zer, można pokusić się o przynajmniej fragmentaryczny opis własności, które powinien posiadać hipotetyczny operator. H. L. Montgomery [24] badał rozmieszczenie par (γ, γ'), gdzie γ i γ' oznaczają części urojone nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna. W tym celu wprowadził funkcję

$$F(\alpha, T) = \frac{2\pi}{T\log T} \sum_{0<\gamma,\gamma'\leqslant T} T^{i\alpha(\gamma-\gamma')} \frac{4}{4+(\gamma-\gamma')^2}$$

i udowodnił, że przy założeniu Hipotezy Riemanna mamy

$$F(\alpha, T) = (1 + o(1))T^{-2\alpha}\log T + \alpha + o(1)$$

przy $T \to \infty$ i $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Wysunął także przypuszczenie, że

$$F(\alpha, T) = 1 + o(1)$$

jednostajnie dla $\alpha \in [a, b]$, gdzie $1 \leqslant a < b < \infty$. Przypuszczenie to pociąga za soba prawdziwość następującej *Hipotezy Montgomery'ego o korelacji par zer*:

$$\frac{2\pi}{T\log T}\#\left\{(\gamma, \gamma') : 0 < \gamma, \gamma' \leqslant T : \frac{2\pi\alpha}{T\log T} \leqslant \gamma - \gamma' \leqslant \frac{2\pi\beta}{T\log T}\right\} \sim \int_\alpha^\beta 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 du$$

$(0 < \alpha < \beta < \infty)$.

Funkcja gęstości

$$1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 \tag{11}$$

pojawia się także w fizyce matematycznej przy okazji badania unitarnego układu Gaussa. Układ taki opisywany jest przez macierze hermitowskie $A = (a_{jk})$ wymiaru n, gdzie

$$a_{jj} = \sqrt{2}\sigma_{jj}$$

oraz dla $j \neq k$

$$a_{jk} = \begin{cases} \sigma_{jk} + i\eta_{jk} & (j < k), \\ \overline{a_{kj}} & (j > k), \end{cases}$$

przy czym σ_{jk} i η_{jk} są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym. Przy $n \to \infty$ i po odpowiednim unormowaniu wartości własne macierzy A mają funkcję korelacji par równą (11). Można stąd wysnuć wniosek, że operator, którego szukamy i który jest związany z zerami funkcji dzeta Riemanna, powinien być hermitowski ([6], [27]). Występowanie unitarnego układu Gaussa nie ogranicza się do przypadku nietrywialnych zer funkcji dzeta Riemanna, lecz ma bardzo ogólny charakter (patrz [19]).

Na zakończenie opiszmy przykład „porządnej" funkcji dzeta mającej wiele własności wspólnych z funkcją dzeta Riemanna i dla której analogon Hipotezy Riemanna *nie* jest prawdziwy ([32]). Niech $\zeta(s, a)$ oznacza tak zwaną *funkcję dzeta Hurwitza*, która dla $\sigma > 1$ zdefiniowana jest przez szereg

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \qquad 0 < a \leqslant 1,$$

i dla pozostalych s przez odpowiednie przedłużenie analityczne. Niech

$$\eta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}$$

oraz

$$f(s) = \frac{1}{5^s}\left(\zeta\left(s, \frac{1}{5}\right) + \eta\zeta\left(s, \frac{2}{5}\right) - \eta\zeta\left(s, \frac{3}{5}\right) - \zeta\left(s, \frac{4}{5}\right)\right).$$

Wtedy f jest funkcją całkowitą oraz dla s zespolonych spełnia następujące równanie funkcyjne

$$\left(\frac{5}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) f(s) = \left(\frac{5}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) f(1-s).$$

Można wykazać, stosując metody opracowane w teorii funkcji dzeta Riemanna, że f ma nieskończenie wiele zer na prostej krytycznej. Jednak f *ma także nieskończenie wiele zer na półpłaszczyźnie* $\sigma > 1$! Istotna różnica między ζ a f polega na tym, że f nie ma iloczynu Eulera. Stąd wniosek, że do dowodu Hipotezy Riemanna nie wystarczy samo równanie funkcyjne oraz że fakt posiadania przez ζ iloczynu Eulera jest ważny.

7. Części urojone pierwszych stu zer nietrywialnych. Oznaczmy kolejne zera z dodatnimi częściami urojonymi przez

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n,$$

gdzie

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 \ldots$$

Niniejsza lista pierwszych stu nietrywialnych zer może być źródłem zadumy dla Czytelnika.

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1} &= 14.134725141734693790457251983562470270784257115699243175685 6,\\
\gamma_{2} &= 21.022039638771554992628479593896902777334340524902781754629 5,\\
\gamma_{3} &= 25.010857580145688763213790992562821818659549672557996672496 5,\\
\gamma_{4} &= 30.424876125859513210311897530584091320181560023715440180962 1,\\
\gamma_{5} &= 32.935061587739189690662368964074903488812715603517039009280 0,\\
\gamma_{6} &= 37.586178158825671257217763480705332821405597350830793218333 0,\\
\gamma_{7} &= 40.918719012147495187398126914633254395726165962777279536161 3,\\
\gamma_{8} &= 43.327073280914999519496122165406805782645668371836871446878 9,\\
\gamma_{9} &= 48.005150881167159727942472749427516041686844001144425117775 3,\\
\gamma_{10} &= 49.773832477672302181916784678563724057723178299676662100782 0,\\
\gamma_{11} &= 52.970321477714460644147296608880990063825017888821224779900 7,\\
\gamma_{12} &= 56.446247697063394804367759476706127552782264471716631845451 0,\\
\gamma_{13} &= 59.347044002602353079653648674992219031098772806466669392914 1,\\
\gamma_{14} &= 60.831778524609809844259901824524003802910090451219178257101 3,\\
\gamma_{15} &= 65.112544048081606660875054253183705029348149295166722405967,\\
\gamma_{16} &= 67.079810529494173714478828896522216770107144951745558874197,\\
\gamma_{17} &= 69.546401711173979252926857526554738443012474209602510157325,\\
\gamma_{18} &= 72.067157674481907582522107969826168390480906621456697086683,\\
\gamma_{19} &= 75.704690699083933168326916762030345922811903530697400301648,\\
\gamma_{20} &= 77.144840068874805372682664856304637015796032449234461041765,\\
\gamma_{21} &= 79.337375020249367922763592877116228190613246743120030878439,\\
\gamma_{22} &= 82.910380854086030183164837494770609497508880593782149146571,\\
\gamma_{23} &= 84.735492980517050105735311206827741417106627934240818702736,\\
\gamma_{24} &= 87.425274613125229406531667850919213252171886401269028186456,\\
\gamma_{25} &= 88.809111207634465423682348079509378395444893409818675042200,\\
\gamma_{26} &= 92.491899270558484296259725241810684878721794027730646175097,\\
\gamma_{27} &= 94.651344040519886966597925815208153937728027015654852019592,\\
\gamma_{28} &= 95.870634228245309758741029219246781695256461224987998420529,\\
\gamma_{29} &= 98.831194218193692233324420138622327820658039063428196102819,\\
\gamma_{30} &= 101.317851005731391228785447940292308906332866384300894799928,\\
\gamma_{31} &= 103.725538040478339416398408108695280834481173069495764519885,\\
\gamma_{32} &= 105.446623052326094493670832414111808997282753928535138480569,\\
\gamma_{33} &= 107.168611184276407515123351963086191213476707881404765279265,\\
\gamma_{34} &= 111.029535543169674524656450309944350415345968390073056846191,\\
\gamma_{35} &= 111.874659176992637085612078716770594960311749873385873816619,\\
\gamma_{36} &= 114.320220915452712765890937276191079809917657723829892287728,
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{37} = 116.226680320857554382160804312064755127329851232383220283863,$$
$$\gamma_{38} = 118.790782865976217322979139702699824347306210592809382784194,$$
$$\gamma_{39} = 121.370125002420645918945532970499922723001310631728740792808,$$
$$\gamma_{40} = 122.946829293552588200817460330770016496214389873863517211950,$$
$$\gamma_{41} = 124.256818554345767184732007966129924441573538774693561140355,$$
$$\gamma_{42} = 127.516683879596495124279323766906076268088309881554982482800,$$
$$\gamma_{43} = 129.578704199956050985768033906179973608640953264659431030471,$$
$$\gamma_{44} = 131.087688530932656723566372461501349059203547502975045383140,$$
$$\gamma_{45} = 133.497737202997586450130492042640607664974174943904675015102,$$
$$\gamma_{46} = 134.756509753373871331326064157169736178396068613647164416976,$$
$$\gamma_{47} = 138.116042054533443200191555190282447859835274624146235685345,$$
$$\gamma_{48} = 139.736208952121388950450046523382460846790052565382603081370,$$
$$\gamma_{49} = 141.123707404021123761940353818475355090300660879747620032105,$$
$$\gamma_{50} = 143.111845807620632739405123868913929966233102430354632548599,$$
$$\gamma_{51} = 146.000982486765518547402507596424682428975741233095803636977,$$
$$\gamma_{52} = 147.422765342559602049521185010431506168772775250476830601010,$$
$$\gamma_{53} = 150.053520420784880351432467236959370623037321559528200448429,$$
$$\gamma_{54} = 150.925257612241466761852524678305627602426770472996717700311,$$
$$\gamma_{55} = 153.024693811198896198256544255185446508590434904145506675200,$$
$$\gamma_{56} = 156.112909294237867569750189310169194746535308500942920803856,$$
$$\gamma_{57} = 157.597591817594059887530503158498765730723899519141733538250,$$
$$\gamma_{58} = 158.849988171420498724174994775540271414335083049426966257724,$$
$$\gamma_{59} = 161.188964137596027519437344129369554364915790327475466579188,$$
$$\gamma_{60} = 163.030709687181987243311039000687994896964461416477683115210,$$
$$\gamma_{61} = 165.537069187900418830038919354874797328367251745068604478953,$$
$$\gamma_{62} = 167.184439978174513440957756246210378736460769242616767361107,$$
$$\gamma_{63} = 169.094515415568821489505871181431834796667648580441625087382,$$
$$\gamma_{64} = 169.911976479411698966699843595821792288394437125341373018541,$$
$$\gamma_{65} = 173.411536519591552959846118649345595254156066063420117933682,$$
$$\gamma_{66} = 174.754191523365725813378762455866917938755717620571663445612,$$
$$\gamma_{67} = 176.441434297710418888892641057860933528118497108809715347613,$$
$$\gamma_{68} = 178.377407776099977285830935414184426183132361461272503701489,$$
$$\gamma_{69} = 179.916484020256996139340036612051237453687607553018406541301,$$
$$\gamma_{70} = 182.207078484366461915407037226987798690797457778239908766630,$$
$$\gamma_{71} = 184.874467848387508800960646617234258413351022911950667773179,$$
$$\gamma_{72} = 185.598783677707471466527704268392646612934717649513283088920,$$
$$\gamma_{73} = 187.228922583501851991641540586131243016810734603990319151464,$$
$$\gamma_{74} = 189.416158656016937084852289099845324491357103023193354355420,$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{75} &= 192.026656360713786547283631425583430105839920297977096916289,\\
\gamma_{76} &= 193.079726603845704047402205794376054604020615810548860138504,\\
\gamma_{77} &= 195.265396679529235321463187814862250926905052452286924060111,\\
\gamma_{78} &= 196.876481840958316948622263914696207735746028691942215482823,\\
\gamma_{79} &= 198.015309676251912424919918702208867155062695438570996721535,\\
\gamma_{80} &= 201.264751943703788733016133427548173222402863639186734080633,\\
\gamma_{81} &= 202.493594514140534277686660637864315821020244899420053909069,\\
\gamma_{82} &= 204.189671803104554330716438386313685136534529228741907350960,\\
\gamma_{83} &= 205.394697202163286025212379390693090923722914772048407002134,\\
\gamma_{84} &= 207.906258887806209861501967907753644268659403768883999858658,\\
\gamma_{85} &= 209.576509716856259852835644289886752175390783181326162468977,\\
\gamma_{86} &= 211.690862595365307563907486730719294253394030982935643736210,\\
\gamma_{87} &= 213.347919359712666190639122021072608821897183276633069059854,\\
\gamma_{88} &= 214.547044783491423222944201072590691045599888053083076400082,\\
\gamma_{89} &= 216.169538508263700265869563354498128575453714274164110976376,\\
\gamma_{90} &= 219.067596349021378985677256590437241245149182927011351373558,\\
\gamma_{91} &= 220.714918839314003369115592633906339656761145077661965701612,\\
\gamma_{92} &= 221.430705554693338732097475119276077950222331077319909379420,\\
\gamma_{93} &= 224.007000254604335211728875528504895356085989949595529762950,\\
\gamma_{94} &= 224.983324669582287503782523680528656772090054485587426988478,\\
\gamma_{95} &= 227.421444279679291310461436160659639963969148321976628364894,\\
\gamma_{96} &= 229.337413305525348107760083306055740082752341387818517532636,\\
\gamma_{97} &= 231.250188700499164773806186770010372606708495843123371406806,\\
\gamma_{98} &= 231.987235253180248603771668539197862205419833994562496484727,\\
\gamma_{99} &= 233.693404178908300640704494732569788179537227754565836363015,\\
\gamma_{100} &= 236.524229665816205802475507955662978689529495212189123700919.
\end{aligned}
$$

Dodane przy korekcie. Po oddaniu powyższego tekstu do druku została rozpowszechniona drogą internetową praca trzech matematyków hinduskich (Manindra Agrawal, Neeral Kayal, Nitin Saxena, *PRIMES is in P*), w której skonstruowany jest deterministyczny test pierwszości działający w czasie wielomianowym (por. ostatni akapit § 4). Analiza zaproponowanego algorytmu pokazuje, że oparty jest on na ważnej pracy A. Fouvry'ego *Théorème de Brun–Titchmarsh*; *application au théorème de Fermat*, Invent. Math. 79 (1985), 383–407). Dowodzone jest w niej między innymi oszacowanie z dołu liczby liczb pierwszych $p \leqslant x$, dla których $p-1$ ma dzielnik pierwszy $\geqslant x^{2/3}$, wykorzystując przy tym cały arsenał środków analitycznej teorii liczb. Dowód jest długi i skomplikowany. Nie korzysta jednak z żadnych założeń dotyczących hipotetycznego położenia nietrywialnych zer funkcji L. Jest to więc ilustracja sytuacji, o której była mowa na początku § 4: wynik uzyskany wcześniej przy założeniu Hipotezy Riemanna zostaje udowodniony bez tego założenia, ale w sposób znacznie bardziej skomplikowany.

Bibliografia

[1] J. Bourgain, *On large values estimates for Dirichlet polynomials and the density hypothesis for the Riemann zeta function*, Internat. Math. Res. Notices 3 (2000), 133–146.

[2] E. Bombieri, *Counting points on curves over finite fields* (*d'après A. Stepanov*), Séminaire Bourbaki 430 (1972–1973).

[3] E. Bombieri, H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(1/2+it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 13 (1986), 449–472.

[4] J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967.

[5] B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. 399 (1989), 1–26.

[6] B. Conrey, *L-functions and random matrices*, w: Mathematics Unlimited—2001 and Beyond, Springer, 2001, 331–352.

[7] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3rd edition, Grad. Texts in Math. 74, Springer, 2000.

[8] P. Deligne, *La conjecture de Weil*, *I,* Publ. Math. IHES 43 (1974), 273–307.

[9] R. Godement, H. Jacquet, *Zeta Functions of Simple Algebras*, Lecture Notes in Math. 260, Springer, 1972.

[10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[11] C. Hooley, *On Artin's conjecture*, J. Reine Angew. Math. 225 (1967), 209–220.

[12] M. N. Huxley, *On the difference between consequtive primes*, Invent. Math. 15 (1972), 164–170.

[13] H. Iwaniec, *Topics in Classical Authomorphic Forms*, Grad. Stud. in Math. 17, Amer. Math. Soc., 1997.

[14] A. Ivić, *The Riemann Zeta Function*, Wiley-Interscience, 1985.

[15] H. Jacquet, *Principal L-functions of the linear group*, Proc. Sympos. Pure Math. 33 (2) (1979), 63–86.

[16] J. Kaczorowski, *Boundary values of Dirichlet polynomials and the distribution of primes*, w: Proc. ECM (Budapest, 1996), Progr. Math. 168, 1998, 237–254.

[17] J. Kaczorowski, *VIII problem Hilberta*, w: Problemy Hilberta (redaktor: W. Więsław), Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa, 1997.

[18] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class*: *a survey*, w: Number Theory in Progress, Proc. Conf. in Honor of A. Schinzel, ed. by K. Győry *et al.*, de Gruyter, 1999, 953–992.

[19] N. Katz, P. Sarnak, *Zeros of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1999), 1–26.

[20] R. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, w: Lecture Notes in Math. 170, Springer, 1970, 18–86.

[21] G. L. Miller, *Riemann's hypothesis and tests for primality*, J. Comput. Systems Sci. 13 (1976), 300–317.

[22] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer, 1989.

[23] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer, 1971.

[24] H. L. Montgomery, *The pair-correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math. 24, Amer. Math. Soc., 1973, 181–193.

[25] W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Springer –PWN, 1990.

[26] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory*, Springer, 2000.

[27] A. Odlyzko, *The* 10^{20}*-th zero of the Riemann zeta function and* 70 *million of its neighbors*, ATT preprint, 1989.
[28] J. C. Lagarias, A. Odlyzko, *Effective versions of the Chebotarev density theorem*, w: Algebraic Number Fields, ed. by A. Fröhlich, Academic Press, 1977, 409–464.
[29] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer, 1957.
[30] A. Selberg, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*, Archiv f. Mathematik og Naturvidenskab. 48 (1946), 89–155.
[31] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, w: Proc. Amalfi Conf. on Analytic Number Theory, ed. by E. Bombieri *et al.*, 367–385, Universitá di Salerno, 1992; Collected Papers, vol. II, 47–63, Springer, 1991.
[32] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd edition, Clarendon Press, 1986.
[33] A. Weil, *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris, 1948.
[34] A. Weil, *Courbes Algébriques et les Variétés Abéliennes*, Hermann, Paris, 1971.
[35] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. 141 (1995), 443–551.