ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC
v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010
XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

As Integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox

F. Silva Costa, **J. Vaz Jr.**, **E. Capelas de Oliveira**
Depto de Matemática Aplicada, Imecc, Unicamp,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: pdiulfelix@hotmail.com, vaz@ime.unicamp.br, capelas@ime.unicamp.br

R. Figueiredo Camargo
Faculdade de Ciências - Unesp
17033-360, Bauru, SP
E-mail: rubens@fc.unesp.br

Resumo: *Usando as integrais de Mellin-Barnes, apresentamos a função de Fox a fim de discutir a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo.*

Palavras-chave: *Integral de Mellin-Barnes, Função de Fox, Equação do Telégrafo Fracionária.*

1 Introdução

São várias as maneiras de se estudar as funções especiais das quais podemos mencionar: (a) A partir de uma função geratriz; (b) Utilizando relações de recorrência; (c) usando a respectiva equação diferencial ordinária, quando pertinente[1], bem como (d) a partir de representações integrais, dentre outras. Visto que colocamos uma restrição (pertinência) podemos formular uma pergunta, a saber: Existe uma maneira geral de se abordar as funções especiais?

Antes de respondermos a esta pergunta, vamos nos restringir à classe de funções especiais contendo apenas uma variável independente.[2] Agora sim, uma maneira conveniente de abordar este estudo é através das chamadas integrais (no plano complexo) de Mellin-Barnes, conforme introduzidas, num trabalho pioneiro, por Pincherle [18], cuja teoria foi desenvolvida por Mellin e, utilizadas por Barnes, na integração completa da equação hipergeométrica que, por isso, hoje, justificam o nome de integrais de Mellin-Barnes. Estas integrais se caracterizam por conterem no integrando, de um modo geral, um quociente entre produtos de funções gama. Como complemento à resposta da pergunta, aqui, vamos considerar a classe de funções conhecida pelo nome de função H de Fox [8]. Esta função admite um importante caso especial, a chamada função G de Meijer [16], que por sua vez congrega, obtidas como casos particulares, as funções especiais da Física-Matemática, dentre elas as clássicas funções hipergeométricas [11].

Em resumo, vamos apresentar a função H de Fox através das integrais de Mellin-Barnes a fim de resolver a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo.

Este trabalho está disposto da seguinte maneira: Na Seção 2, introduzimos as integrais de Mellin-Barnes exemplificando a sua utilidade no caso da clássica função hipergeométrica. Na Seção 3, apresentamos a função de Fox e, como caso especial, recuperamos a função de Meijer. Na Seção 4 efetuamos um resumo das preliminares envolvendo o cálculo fracionário, em particular as transformadas de Laplace e Fourier a fim de resolver, na Seção 5, o problema do telégrafo na versão fracionária, isto é, a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo.

[1]Existem funções especiais que não satisfazem a uma específica equação diferencial ordinária, dentre elas, mencionamos a função H de Fox.

[2]Existem funções especiais que dependem de mais de uma variável independente, bem como de mais de um parâmetro. Apenas para citar, as funções de Lauricella pertencem a esta classe [12].

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3
PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

2 As Integrais de Mellin-Barnes

Em um recente artigo Mainardi-Pagnini [13] recuperaram os resultados de Pincherle [18] onde foi introduzido, pela primeira vez, a partir do chamado "princípio da dualidade", as hoje conhecidas como integrais de Mellin-Barnes. Também recente é o artigo de Saxena [20], onde é apresentado um resumo da vida acadêmica de Fox, em particular como foi introduzida a função H de Fox em termos das integrais de Mellin-Barnes.

Em analogia às transformada de Laplace e de Fourier, podemos introduzir a transformada de Mellin através de um par de integrais, isto é, a transformada de Mellin direta e a respectiva transformada de Mellin inversa. No caso particular de a função a ser transformada conter uma ou mais funções gama, vamos obter as chamadas integrais de Mellin-Barnes. Tais integrais desempenham um papel fundamental, em particular, como vamos ver na Seção 3, no estudo das funções de Fox que, como já afirmamos, contêm, como casos particulares, todas as clássicas funções especiais da Física-Matemática e os vários tipos de funções de Mittag-Leffler.

Visto que as transformadas integrais desempenham um papel importante quando da resolução de um problema envolvendo uma equação diferencial e condições iniciais/contorno, introduzimos as integrais de Mellin-Barnes através da transformada de Mellin [21].

2.1 Função Hipergeométrica

A fim de exemplificarmos o cálculo explícito de uma transformada de Mellin, vamos obter a transformada de Mellin da função hipergeométrica, ou seja, calcular a seguinte integral

$$\mathfrak{M}[{}_2F_1(a,b;c;-x)] = \int_0^\infty x^{s-1}{}_2F_1(a,b;c;-x)\mathrm{d}x$$

onde $a,b,c \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Para calcular a integral acima, introduzimos a representação integral devida a Euler, de modo a escrever, já invertendo a ordem das integrações,

$$\mathfrak{M}[{}_2F_1(a,b;c;-x)] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \xi^{b-1}(1-\xi)^{c-b-1}\mathrm{d}\xi \cdot \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+\xi x)^a}\mathrm{d}x.$$

Primeiramente, introduzimos a mudança de variável $x = (1-t)/t\xi$ cuja integral na variável t é dada em termos de uma função beta. Novamente utilizando a definição da função beta para integrar na variável ξ, obtemos

$$\mathfrak{M}[{}_2F_1(a,b;c;-x)] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-s)}$$

para $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\mathrm{Re}(a-s) > 0$, $\mathrm{Re}(b-s) > 0$ e $\mathrm{Re}(c-s) > 0$, cuja inversa é

$$\mathfrak{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-s)}\right] = {}_2F_1(a,b;c;-x).$$

Enfim, introduzindo a integral da transformada inversa podemos escrever a seguinte representação integral, no plano complexo, para a clássica função hipergeométrica

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s}\mathrm{d}s$$

onde $a,b,c \in \mathbb{C}$ e $\min\{\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b)\} > \gamma > 0$, $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ e $|\arg(-z)| < \pi$. O caminho de integração é tal que os pólos em $s = a+n$ e $s = b+n$ estejam separados daqueles em $s = -n$ com $n = 0,1,2,\ldots$

Chama-se integral de Mellin-Barnes a toda integral no plano complexo cujo integrando contempla pelo menos uma função gama. A representação integral para a função hipergeométrica, nada mais é que uma integral de Mellin-Barnes.

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Convém ressaltar que Pincherle [18] obteve a seguinte fórmula

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left\{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(x-\rho_i)/\prod_{i=1}^{m-1}\Gamma(x-\sigma_i)\right\}\mathrm{e}^{xt}\mathrm{d}x$$

com $a > \mathrm{Re}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$, cuja convergência foi provada usando uma fórmula assintótica para a função gama. Esta integral pode ser considerada como o primeiro exemplo na literatura do que é hoje conhecido com o nome de integral de Mellin-Barnes [13].

3 Função de Fox

A função H, introduzida por Fox [8], é uma função especial que contempla, como casos particulares, várias funções especiais da Física-Matemática e que permite tratar diferentes problemas de maneira unificada. Apenas para mencionar, problemas envolvendo difusão anômala [14, 6] e problemas advindos da física de partículas elementares [17] são tratados via função de Fox.

Existem compêndios onde a função de Fox é abordada, em particular, mencionamos o artigo [14] e os livros [15, 10] porém não é unanimidade a maneira de introduzi-la no sentido de considerarmos, ou não, a transformada de Mellin, conforme anteriormente mencionado.

Neste trabalho, como já afirmamos, vamos introduzir a função de Fox através de uma integral de Mellin-Barnes de modo que possamos, quando necessário, interpretá-la como uma transformada de Mellin inversa.

Consideramos os inteiros m, n, p, q de modo que $0 \leq n \leq p$ e $1 \leq m \leq q$ e os parâmetros $a_\ell, b_j \in \mathbb{C}$ e $A_\ell, B_j \in \mathbb{R}^+$ para $\ell = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, q$. Definimos a função $H \equiv H(z)$ de Fox a partir da seguinte integral de Mellin-Barnes

$$H(z) \equiv H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p)\\ (b_1, B_1), \ldots, (b_q, B_q)\end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}}\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)\, z^{-s}\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

onde

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j + B_j s)\prod_{\ell=1}^{n}\Gamma(1 - a_\ell - A_\ell s)}{\displaystyle\prod_{\ell=n+1}^{p}\Gamma(a_\ell + A_\ell s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j - B_j s)}.$$

O contorno $\mathcal{L}$ na Eq.(1) pode ser escolhido de três maneiras distintas [10] porém para todas elas devemos impor que os pólos

$$\begin{aligned} b_{j\ell} &= -\frac{b_j + \ell}{B_j} \qquad \text{com} \quad j = 1, \ldots, m\,; \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \\ a_{rk} &= \frac{1 - a_r + k}{A_r} \qquad \text{com} \quad r = 1, \ldots, n\,; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

não coincidam, isto é, os parâmetros complexos a_i e b_i são tomados com a imposição de que nenhum pólo do integrando venha a coincidir. O contorno dispõe todos os pólos em $s = b_{j\ell}$ à esquerda e todos os pólos $s = a_{rk}$ à direita de $\mathcal{L}$ [10]. Nos casos em que $n = 0$, $m = q$ e $n = p$, devemos interpretar os produtórios como sendo 1. No particular caso em que $A_j = 1 = B_j$, para todo j, recuperamos a chamada função de Meijer [16].

Braaksma [1] mostrou que, independentemente da escolha do contorno, a integral de Mellin-Barnes faz sentido e define uma função analítica na variável z nos dois casos a seguir:

$$\mu > 0, \quad 0 < |z| < \infty \quad \text{onde} \quad \mu = \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j\,,$$

e

$$\mu = 0, \quad 0 < |z| < \delta \quad \text{onde} \quad \delta = \prod_{j=1}^{p} A_j^{-A_j} \cdot \prod_{j=1}^{q} B_j^{B_j}\,.$$

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

4 Cálculo fracionário

O cálculo fracionário é uma das ferramentas mais precisas para se refinar a descrição de fenômenos naturais. Uma maneira bastante comum de se utilizar esta ferramenta é substituir a derivada de ordem inteira de uma equação diferencial parcial, que descreve um determinado fenômeno, por uma derivada de ordem não inteira. Vários resultados importantes e generalizações foram obtidos através desta técnica, em diversas áreas do conhecimento, tais como: mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte, redes elétricas, probabilidade, biomatemática, dentre outros [4].

Para resolver a equação diferencial fracionária linear, utilizamos a metodologia da justaposição de transformadas, i.e., aplicamos a transformada de Fourier na parte espacial e a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal. Sendo assim, nesta seção apresentamos a derivada fracionária no sentido de Caputo [2], bem como suas transformadas de Laplace e Fourier. Além disso, recuperamos alguns resultados envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

4.1 Derivada Fracionária

Há várias formas de se introduzir a derivada de ordem não inteira como uma generalização para a derivada de ordem inteira, dentre elas, a definição de Riemann-Liouville, que é a mais conhecida e a de Caputo, que é mais restritiva, mas é mais adequada para o estudo de problemas físicos [7]. A derivada de ordem μ no sentido de Caputo é definida da seguinte maneira [2]

$$\mathsf{D}_t^{\mu} f(t,x) \equiv \frac{\partial^{\mu}}{\partial t^{\mu}} f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\mu)} \displaystyle\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau,x)}{(t-\tau)^{\mu+1-n}} \mathrm{d}\tau\,, & n-1<\mu<n\,, \\ f^{(n)}(t,x)\,, & \mu \equiv n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

na qual $f^{(n)}(t,x)$ denota a derivada usual de ordem n em relação à variável t.

Deste ponto em diante, consideramos o limite inferior a como sendo $-\infty$ na parte espacial e zero na parte temporal. O primeiro e segundo casos estão associados, respectivamente, às transformadas de Fourier e de Laplace.

Ressalte-se que, enquanto a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo depende de condições iniciais que possuem interpretação física, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville depende de condições dadas em termos de ${}_a\mathsf{D}_t^{\mu-k-1} f(t)|_{t=0}$. Outra importante diferença entre estas duas abordagens é que a derivada fracionária de Caputo de uma constante é zero, o que não ocorre com a definição de Riemann-Liouville.[3]

4.2 Funções de Mittag-Leffler

Nesta seção introduzimos a função de Mittag-Leffler com três parâmetros, também conhecida como função de Mittag-Leffler generalizada, proposta por Prabhakar [19], isto é,

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \frac{z^k}{k!} \tag{2}$$

na qual $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer, e $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

Podemos escrever o par de transformadas de Laplace da função de Mittag-Leffler generalizada [10], ou seja, com $\mathrm{Re}(s) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, valem as relações:

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\pm\lambda t^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)^{\rho}}\right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}(\pm\lambda\, t^{\alpha}). \tag{3}$$

[3]Note que desta forma a derivada segundo Riemann-Liouville não pode ser interpretada como a taxa de variação. Isto justifica a utilização da derivada de Caputo e não a de Riemann-Liouville, quando estamos interessados em resolver uma equação diferencial parcial fracionária.

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Por conveniência, no que se segue, vamos considerar a seguinte função de Mittag-Leffler

$$\mathcal{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(t,y,\gamma) \equiv t^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(-\mathcal{K}|y|^{\gamma}t^{\alpha}), \tag{4}$$

onde $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$, $\text{Re}(\rho) > 0$, $\mathcal{K}$ é uma constante positiva e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^n$. Aqui, associamos a variável t como sendo o tempo enquanto que a variável y como sendo a variável espacial. Note-se que, no caso em que $\rho = 1$, recuperamos os resultados obtidos por Yu & Zhang [22].

5 Equação do telégrafo fracionária

Como aplicação, discutimos a equação do telégrafo fracionária no caso tridimensional.

A equação diferencial fracionária a ser estudada é

$$a\mathsf{D}^{2\alpha}_t u + b\mathsf{D}^{\beta}_t u = -\mathcal{K}(-\Delta)^{\gamma}u, \quad t > 0; \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{5}$$

com $\mathsf{D} \equiv \partial/\partial t$, $1/2 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$ e $0 < \gamma \leq 1$, com $u = u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$, $x = x(x_1, x_2, x_3)$. Aqui $(-\Delta)^{\gamma}$ denota o operador de Laplace fracionário [3]. $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{K}$ uma constante física real, t é a variável temporal e x é a variável espacial. No caso em que $\alpha = \beta = \gamma = 1$ recuperamos a clássica equação do telégrafo. Assim a Eq.(5) pode ser considerada como uma generalização da clássica equação do telégrafo. Aqui, não estamos preocupados com as unidades físicas, as quais foram tratadas no trabalho [9].

Admitamos as seguintes condições iniciais e de contorno

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \text{e} \quad \mathsf{D}^k_t u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) = f_k(x),$$

respectivamente, para $k = 0, 1$.

Enfim, consideremos a derivada fracionária temporal no sentido de Caputo[4], a derivada espacial fracionária é no sentido de Riesz e usamos a relação [3]

$$\mathfrak{F}\left[(-\Delta)^{\gamma}u(t, x; \alpha, \beta, \gamma); \omega\right] = |\omega|^{2\gamma}\mathfrak{F}\left[u(t, x; \alpha, \beta, \gamma); \omega\right]$$

onde ω é o parâmetro da transformada de Fourier, obtemos uma outra equação diferencial fracionária

$$a\mathsf{D}^{2\alpha}_t \widehat{u} + b\mathsf{D}^{\beta}_t \widehat{u} = -\mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}\widehat{u} \tag{6}$$

satisfazendo as seguintes condições iniciais

$$\mathsf{D}^k_t \widehat{u}(t, \omega, \alpha, \beta, \gamma) = F_k(\omega)$$

com $k = 0, 1$, onde $\widehat{u} = \widehat{u}(t, \omega; \alpha, \beta, \gamma)$ é a transformada de Fourier de $u = u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$ e $F_k(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f_k(x)$.

Então, tomando a transformada de Laplace da Eq.(6) e usando as condições iniciais, obtemos uma equação algébrica cuja solução é dada por

$$\widehat{U}(p, \omega; \alpha, \beta, \gamma) = F_0(\omega)\frac{a\,p^{2\alpha-1} + b\,p^{\beta-1}}{a\,p^{2\alpha} + b\,p^{\beta} + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}} \tag{7}$$

onde p é o parâmetro da transformada de Laplace e $\widehat{U}(p, \omega; \alpha, \beta, \gamma)$ é a justaposição das transformadas inversas de $u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$. Para obter a última expressão usamos as condições

$$u(0, x; \alpha, \beta, \gamma) = f_0(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{u}(0, \omega; \alpha, \beta, \gamma) = F_0(\omega)$$

[4]No sentido de Caputo, a transformada de Laplace associada com a derivada fracionária é $\mathfrak{L}[\mathsf{D}^{\mu}_t f(t); p] = p^{\mu}\mathfrak{L}[f(t); p] - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\,p^{\mu-k-1}$. Para a transformada de Fourier temos $\mathfrak{F}[\mathsf{D}^{\mu}_t f(t); \omega] = (-i\omega)^{\mu-n}\mathfrak{F}[[\mathsf{D}^{n}_t f(t); \omega]$.

e

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x;\alpha,\beta,\gamma)\bigg|_{t=0} = f_1(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma)\bigg|_{t=0} = F_1(\omega) = 0.$$

Vamos proceder com a inversão. Tomando a transformada de Laplace inversa, temos [5]

$$\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma) = F_0(\omega)\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r t^{(2\alpha-\beta)r}E^{r+1}_{2\alpha,(2\alpha-\beta)r+1}\left(-\frac{\mathcal{K}}{a}|\omega|^{2\gamma}t^{2\alpha}\right)$$

$$+\frac{b}{a}F_0(\omega)\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r t^{(2\alpha-\beta)(r+1)}E^{r+1}_{2\alpha,(2\alpha-\beta)(r+1)+1}\left(-\frac{\mathcal{K}}{a}|\omega|^{2\gamma}t^{2\alpha}\right) \tag{8}$$

com $\mathrm{Re}(\alpha) > 1/2$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, $\alpha > \beta$, $|b\,s^\beta/(a\,s^\alpha + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma})| < 1$ e $E^\gamma_{\alpha,\beta}(z)$ é a função de Mittag-Leffler, conforme Eq.(2).

Usando a Eq.(4) podemos reescrever a Eq.(8) na forma

$$\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma) = F_0(\omega)\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r\left\{\mathcal{E}^{r+1}_{2\alpha,\mu r+1}(t,\omega;\gamma) + \frac{b}{a}\mathcal{E}^{r+1}_{2\alpha,\mu(r+1)+1}(t,\omega;\gamma)\right\}$$

onde definimos o parâmetro $\mu = 2\alpha - \beta$.

Para calcular a transformada de Fourier inversa, usamos o teorema de convolução, logo,

$$u(t,x;\alpha,\beta,\gamma) \equiv \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{u}(t,\omega;\alpha,\beta,\gamma);\omega] = \sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r\int_{\mathbb{R}^3}F_0(\xi)\mathcal{G}(t;x-\xi)\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

onde a função $\mathcal{G}(t,x)$, como no caso inteiro, conhecida como solução fundamental, é dada por

$$\mathcal{G}(t;x) = \widehat{\mathcal{E}}^{r+1}_{2\alpha,\mu r+1}(t,x;\gamma) + \frac{b}{a}\widehat{\mathcal{E}}^{r+1}_{2\alpha,\mu(r+1)+1}(t,x;\gamma), \tag{10}$$

a qual pode ser escrita em termos da função H de Fox, como abaixo

$$u(t,x;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}|x|)^3}\sum_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{b}{a}\right)^r\frac{t^{\mu r}}{r!}\int_{\mathbb{R}^3}F_0(\xi)\mathfrak{H}^{2,1}_{2,3}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

onde definimos, com $\mu = 2\alpha - \beta$

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}^{2,1}_{2,3}(x) \quad = \quad & H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^{2\gamma}}{2^{2\gamma}\mathcal{K}t^{2\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1),\ (\mu r+1,2\alpha)\\ (r+1,1),\ (\frac{3}{2},\gamma),\ (1,\gamma)\end{matrix}\right)\\ + \quad & \frac{b}{a}t^\mu H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^{2\gamma}}{2^{2\gamma}\mathcal{K}t^{2\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1),\ [\mu(r+1)+1,2\alpha]\\ (r+1,1),\ (\frac{3}{2},\gamma),\ (1,\gamma)\end{matrix}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Referências

[1] B. L. J. Braaksma, Asymptotic expansions and analytical continuation for a class of Barnes-integrals, *Compositio Math.*, 15 (1962) 239-341.

[2] M. Caputo, Vibrations of an Infinite Viscoelastic Layer with a Dissipative Memory, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 56 (1974) 897-904.

[3] W. Chen and S. Holm, Physical Interpretation of Fractional Diffusion-Wave Equation via Lossy Media Obeying Frequency Power Law, arXiv.org/abs/math-ph/0303040v1 (2003).

[4] Debnath, Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering, *Int. J. Math.*, 2003 (2003) 3413-3442.

ISSN 1984-820X
Anais do CNMAC v.3 PUBLICAÇÃO DA SBMAC
CNMAC2010 XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

[5] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, On Some Fractional Green Functions, *J. Math. Phys.*, 50 (2009) 043514.

[6] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator, *J. Math. Phys.*, 50 (2009) 123518.

[7] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation, *J. Math. Phys.*, 49 (2008) 033505.

[8] C. Fox, The G and H functions as symmetrical Fourier kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 (1961) 395-429.

[9] P. Inizan, Homogeneous Fractional Embeddings, *J. Math. Phys.*, 49 (2008) 082901.

[10] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier, Amsterdam, 2006.

[11] V. Kiryakova, The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions, *Comp. & Math. Appl.*, 59 (2010) 1128-1141.

[12] G. Lauricella, Sulla funzione ipergeometrica a più variabili, *Rend. Circ. Math. Palermo*, 7 (1893) 111-158.

[13] F. Mainardi and G. Pagnini, Salvatore Pincherle: the pioneer of the Mellin-Barnes integrals, *J. Comput. Appl. Math.*, 153 (2003) 331-342.

[14] F. Mainardi, G. Pagnini and R. K. Saxena, Fox H function in fractional diffusion, *J. Comput. Appl. Math.*, 178 (2005) 321-331.

[15] A. M. Mathai and H. J. Haubold, "Special Functions for Applied Scientistic", Springer, Heidelberg, 2008.

[16] G. S. Meijer, On the G function I-VIII, *Nederl. Akad. Wettensch. Proc.*, 49 (1946) 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175. Traduzido para o Inglês: *Indag. Math.* 8 (1946) 124-134, 213-225, 312-324, 391-400, 468-475, 595-602, 661-670, 713-723.

[17] R. F. Ávila and M. J. Menon, Eikonal zeros in the momentum transfer space from proton-proton scattering: An empirical analysis, *Eur. Phys. J.*, 54C, (2008) 555-576.

[18] S. Pincherle, Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate, *Atti R. Accad. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 4 (1888) 694-700 e 792-799.

[19] T. R. Prabhakar, A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, 19 (1971) 7-15.

[20] R. K. Saxena, In memorium of Charles Fox, *Fract. Cal. Appl. Anal.*, 12 (2009) 337-344.

[21] I. N. Sneddon, "The Use of Integral Transforms", McGraw-Hill, New York, 1972.

[22] R. Yu and H. Zhang, New function of Mittag-Leffler type and its application in the fractional diffusion-wave equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 30 (2006) 946-955.