Osječki matematički list 16 (2016), 111-133

Uvod u varijacijski račun i njegova povijest

Krešimir Burazin,* Una Radojičić†

Sažetak

U radu su prikazane osnove varijacijskog računa u slučaju kada traženi ekstrem ovisi samo o jednoj realnoj varijabli te je dan osvrt na njegov povijesni razvoj. Izvedena je Euler-Lagrangeova jednadžba kao nužan uvjet optimalnosti, te je pokazano da je ona i dovoljan uvjet ekstrema u slučaju konveksnog lagrangiana. Teorija je ilustrirana na povijesno važnim primjerima *najkraćeg puta*, *geodetske krivulje na sferi*, te *problema brahistokrone*.

Ključne riječi: *optimizacija, varijacija, Euler-Lagrangeova jednadžba, ekstrem funkcije*

Introduction to the calculus of variations and its history

Abstract

The paper presents the basics of the calculus of variations in case when the extreme searched for depends only on one real variable, and gives an overview of its historical development. We derive a necessary condition for optimality in the form of the Euler-Lagrange equation, and show that it is also a sufficient condition in the case of a convex Lagrangian. The theory is illustrated by the historically important examples of *the shortest path*, *geodesics on the sphere*, and *Brachistohrone problem*.

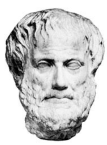
Keywords: *optimization, variation, Euler-Lagrange equation, extrema of function*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: kburazin@mathos.hr

†student, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: uradojic@mathos.hr

1 Uvod i motivacija

Optimizacija kao metoda ima značajnu ulogu u svijetu u kojem živimo. Razne stvari u životu pokušavamo raditi na *optimalan način*, u smislu da pokušavamo *minimizirati nekakav trošak* ili *maksimizirati učinak*. Ovdje riječi *trošak* i *učinak* shvaćamo u puno širem kontekstu od onog materijalnog, koji je možda prva asocijacija. Kada pogledamo znanost u cjelini, lako ćemo uočiti da već od davnih početaka njenog razvoja znanstvenici pokušavaju opisati prirodne fenomene sa *što manjim brojem* zakona i principa. Dakle već i *broj zakona koji pokreću svijet pokušavamo minimizirati*.



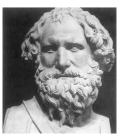
Aristotel (Stagira u Traciji, 384. pr. Kr. – Halkida, 322. pr. Kr.), starogrčki filozof i prirodoslovac

Teza da su neki prirodni fenomeni zapravo posljedica minimizacije neke veličine (često *puta* ili *vremena*) prvi se put pojavljuje u radovima Aristotela. Iako je Aristotel naglašavao važnost logike, nažalost je istovremeno u potpunosti podcijenio ulogu matematike, te zapravo koristi *princip minimuma* u svojim metafizičkim razmatranjima da bi zaključio kako su *rajska gibanja ona koja traju najkraće, te se stoga odvijaju po kružnici* [12]. Prva osoba koja je ozbiljno razmatrala problem minimizacije sa znanstvenog gledišta najvjerojatnije je bio starogrčki matematičar i fizičar Heron, koji je živio u današnjoj Aleksandriji. Zaključio je (bez dokaza) da se zraka svjetlosti, reflektirana od zrcala, kreće po *najbržoj mogućoj putanji* do promatračeva oka. Slični problemi promatrani su i petnaest stoljeća kasnije, te je ova Heronova slutnja zapravo preteča danas poznatog *Fermatovog principa* u optici po kojem svjetlost putuje između dvije točke *po onome putu za koji joj treba najmanje vremena da ga prijeđe*.

Heron (oko 10. – 70.) starogrčki matematičar, fizičar i inženjer

Pierre de Fermat (17. kolovoza 1601. – 12. siječnja 1665.), francuski matematičar i pravnik

Na samom početku prvoga tisućljeća, a i ranije, kraljevi bi nagrađivali svoje najbolje podanike poklanjajući im onoliko zemlje koliko su bili u mogućnosti obujmiti uzoranom brazdom u nekom vremenskom periodu. Upravo se zato razni *perimetrički problemi*, poput pronalaska ravninske krivulje unaprijed zadane duljine koja zatvara lik najveće površine, svrstavaju među neke od najvažnijih matematičkih problema tog vremena. Iako aleksandrijski matematičar Pappus nije bio prva osoba koja je proučavala probleme ovoga tipa, u svojoj knjizi *Zbirka* iz 340. godine sistematizirao je rezultate raznih znamenitih grčkih matematičara o danom problemu. Došao je do zaključka (bez formalnog dokaza) da među svim ravninskim likovima jednakog opsega, krug ima najveću površinu.



Pappus (oko 290. – 350.), starogrčki (aleksandrijski) matematičar

Do sada smo se uvjerili da su se optimizacijski problemi prirodno pojavljivali već od samih početaka razvoja znanosti i društva. Matematički gledano, optimizacijski problemi svode se na određivanje (lokalnih) ekstrema (minimuma ili maksimuma) realnih funkcija. Kada je funkcija čije ekstreme tražimo funkcija jedne ili više realnih varijabli te je *dovoljno glatka*, onda njezine (lokalne) ekstreme možemo relativno jednostavno pronaći korištenjem diferencijalnog računa. Međutim, postoji potreba i za traženjem ekstrema takvih funkcija koje nisu funkcije realnih varijabli.

Jednu takvu klasu optimizacijskih problema čini i *varijacijski račun*. To je dio matematičke analize i teorije optimizacije, koji se bavi problemima egzistencije, jedinstvenosti i određivanja (lokalnih) ekstrema danog integralnog funkcionala koji je zadan na nekakvom skupu realnih ili vektorskih funkcija jedne ili više realnih varijabli. Preciznije, za danu funkciju L i nekakav podskup $\mathcal{C}$ (često vektorski ili afin prostor) skupa svih realnih funkcija realne varijable, zanimaju nas ekstremi (minimum i/ili maksimum) funkcionala $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ oblika

$$I(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x\,, \qquad y \in \mathcal{C}\,. \tag{1}$$

Dakle, sada funkcija I čije ekstreme tražimo nije funkcija realnih varijabli nego joj je domena nekakav skup funkcija $\mathcal{C}$.

Uočimo da je izgled funkcionala I dosta specifičan, te se prirodno postavlja pitanje zašto tražiti ekstreme baš takvog funkcionala? Pokazuje se da se zapravo velik broj *stvarnih problema* može svesti upravo na minimizaciju ili maksimizaciju takvog funkcionala, uz odgovarajući odabir skupa $\mathcal{C}$ i funkcije L. Promotrimo primjerice sljedeće probleme:

A. *Problem najkraćeg puta*: pronaći ravninsku krivulju najmanje duljine koja spaja dvije zadane točke.

B. *Problem najkraćeg puta na sferi (geodetska krivulja na sferi)*: pronaći najkraći put između dvije točke na sferi, ili preciznije, pronaći krivulju najmanje duljine koja leži na danoj sferi i spaja dvije zadane točke te sfere.

C. *Problem brahistokrone*: naći najbrži put gibanja, pod utjecajem gravitacijske sile, između dvije točke u vertikalnoj ravnini. Preciznije, za dane dvije točke u vertikalnoj ravnini naći put koji ih spaja, a koji će materijalna točka, pod utjecajem sile gravitacije, prijeći u najkraćem mogućem vremenu.

D. *Platonov problem*: pronaći rotacijsku plohu najmanje površine koja prolazi kroz dvije zadane točke. Preciznije, pronaći ravninsku krivulju koja spaja dvije dane točke xy-ravnine, a čijom rotacijom oko osi x nastaje ploha najmanje površine.

Svi ti problemi mogu se svesti na pitanja pronalaska ekstrema funkcionala oblika (1), kao što ćemo kasnije i pokazati. Zapravo, s obzirom na specifičnost funkcionala I, nevjerojatna je količina praktičnih primjena varijacijskog računa u raznim područjima znanosti. Neki od primjera uključuju konstrukcije raznih materijala sa željenim svojstvima (krutosti, termalne ili električne vodljivosti i sl.) [2], *mekanog* slijetanja svemirskih letjelica, konstrukcija avionskih krila, prigušivanje neželjenih vibracija u mehaničkim i građevinskim konstrukcijama, do raznih primjena u teoriji upravljanja, općoj teoriji relativnosti i kvantnoj teoriji polja [12]. Primijetite da svi ovi primjeri imaju fizikalnu pozadinu, što ne iznenađuje s obzirom na to da je sam razvoj varijacijskog računa bio motiviran raznim *fizikalnim primjenama*. Međutim, varijacijski račun danas nalazimo i u ekonomiji, književnosti, pa čak i u dizajnu interijera [9].

Gore nabrojeni problemi koriste se danas kao tipični akademski primjeri pri podučavanju varijacijskog računa, međutim oni imaju i veliki povijesni značaj u razvoju varijacijskog računa.

2 Počeci varijacijskog računa

Sir Isaac Newton (Woolsthorpe, 25. prosinca 1642. – Kensington, 20. ožujka 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom

Ozbiljniji razvoj varijacijskog računa počinje u drugoj polovici 17. stoljeća razvojem infinitezimalnog računa, a iz samog izgleda funkcionala I u (1) jasno je da nije ni mogao početi prije.

Prvi ozbiljan varijacijski problem proučavao je Sir Isaac Newton u svom znamenitom djelu *Philosophiae naturalis principia mathematica* objavljenom 1685. Newton je proučavao gibanje tijela kroz neviskozan i nekompresibilan fluid, odnosno bavio se problemom pronalaženja rotirajućeg tijela, koje će, gibajući se kroz fluid konstantnom brzinom, minimizirati otpor fluida [11]. Pretpostavke koje Newton uzima da bi opisao fluid i gibanje tijela u njemu prilično su gruba aproksimacija stvarnog gibanja, ali se pokazuju kao dovoljno dobra aproksimacija u nekim situacijama, poput gibanja fluida u rijetkom plinu malom brzinom, zatim gibanja tijela u idealnom fluidu nadzvučnom brzinom, te za *tanka tijela* [5, 6]. Ovo je prvi problem koji je bio korektno formuliran i riješen, te stoga mnogi uzimaju da njime počinje razvoj varijacijskog računa.

Christiaan Huygens (Haag, 14. travnja 1629. – Haag, 8. lipnja 1695.), nizozemski astronom, matematičar i fizičar

Zanimljivo je da Newton u *Principii* nije objasnio kako je došao do rješenja, te je time zbunio tadašnju matematičku javnost koja nije bila u stanju samostalno izvesti njegove zaključke (čini se da je najbliži tome bio Huygens). Kompletno rješenje Newton je naposljetku zapisao 1691. godine u privatnoj korespondenciji s profesorom astronomije na Oxfordu Davidom Gregoryjem, koji je to prenio ostatku matematičke zajednice kroz svoja predavanja [11].

Johann Bernoulli (Basel, 6. kolovoza 1667. – Basel, 1. siječnja 1748.), švicarski matematičar

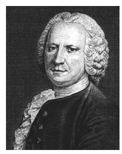
Nedugo zatim, u svibnju 1696. godine, Johann Bernoulli , član vjerojatno najpoznatije matematičke obitelji u povijesti, postavio je svijetu već spomenuti problem brahistokrone. Izazov je objavio u Leibnizovom časopisu *Acta Eruditorum* te ga započinje tekstom [8]

> Ja, Johann Bernoulli pozdravljam najsposobnije matematičare svijeta. Ništa nije atraktivnije inteligentnim ljudima od poštenog izazovnog problema čije će potencijalno rješenje donijeti slavu i trajno ostati zapamćeno. Slijedeći primjere Pascala, Fermata, itd. nadam se da ću zavrijediti zahvale cijele znanstvene zajednice stavljajući pred najbolje matematičare našeg vremena problem koji će testirati njihove metode i snagu njihova intelekta. Ukoliko mi netko predstavi rješenje danog problema, javno ću ga proglasiti hvalevrijednim.

Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1. srpnja 1646. - Hannover, 14. studenoga 1716.), njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat

U nastavku, Johann je precizirao problem, te objavio da ima njegovo rješenje, ali je dao ostalim matematičarima vremena do kraja godine da pokušaju sami doći do istoga. Prema nekim izvorima Johannove namjere i nisu bile tako plemenite kao što bi se dalo naslutiti iz gornjeg teksta. Naime, čini se da je izazov objavio kako bi izazvao svog starijeg brata Jacoba s kojim je bio u sukobu [9], dok je prema nekim izvorima [3] to učinio kako bi izazvao Newtona. Naime, Johann je bio u dobrim odnosima s Leibnizom, te je bio *na njegovoj strani* u poznatom sukobu Leibniza i Newtona oko primata u razvoju infinitezimalnog računa. U svakom slučaju, do kraja godine dobio je samo Leibnizovo rješenje (vjeruje se da je naziv brahistokrona[1] nastao dogovorno od strane Leibniza i Johanna Bernoullija), te je prolongirao rok do Uskrsa 1697. Ovog puta je poslao i pisma s opisom izazova najpoznatijim matematičarima tog vremena, te je uskoro dobio rješenja i od Newtona, Jacoba Bernoullija, te l'Hôpitala . Njih petorica su u to vrijeme zapravo bili i jedini matematičari koji su dobro vladali infinitezimalnim računom.

Jacob Bernoulli (Basel, 6. siječnja 1655. – Basel, 16. kolovoza 1705.), švicarski matematičar



Guillaume de l'Hôpital (Pariz, 1661. – Pariz, 2. veljače 1704.), francuski matematičar

Pogledajmo sada kako se gore navedeni problemi mogu svesti na traženje ekstrema integralnog funkcionala oblika (1).

2.1 Problem najkraćeg puta

Cilj nam je pronaći glatku krivulju koja predstavlja najkraći put između dviju točaka ravnine (a, A) i (b, B), gdje je $a < b$. Iako nam je intuitivno jasno da će najkraća spojnica dviju točaka u ravnini biti dužina određena danim točkama, dokaz te slutnje nije trivijalan. Lako se može vidjeti da je

[1] Naziv dolazi od grčkih riječi *βράχιστος*, najkraći i *χρόνος*, vrijeme

ta krivulja nužno graf nekakve funkcije $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, za koju je $y(a) = A$ i $y(b) = B$. Duljina luka glatke krivulje jednaka je krivuljnom integralu prve vrste, te iznosi

$$S(y) = \int_{\Gamma_y} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} \mathrm{d}x.$$

Početni problem svodi se na traženje funkcije y za koju je vrijednost integrala S najmanja moguća.

2.2 Geodetska krivulja na sferi

U prethodnom smo se primjeru bavili traženjem najkraće udaljenosti među dvjema točkama u ravnini. Međutim, što kada se točke nalaze na sferi danog radijusa i optimalnu putanju tražimo među svim krivuljama na toj sferi, a koje povezuju dane točke? Za modeliranje ovog problema prikladnije su nam sferne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

pri čemu su $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. *Diferenciranjem* dobivamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \sin\theta \cos\varphi \mathrm{d}r + r \cos\theta \cos\varphi \mathrm{d}\theta - r \sin\theta \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y &= \sin\theta \sin\varphi \mathrm{d}r + r \cos\theta \sin\varphi \mathrm{d}\theta + r \sin\theta \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}z &= \cos\theta \mathrm{d}r - r \sin\theta \mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

Tražimo najkraći put na sferi radijusa $R > 0$ između dviju njenih točaka danih u sfernim koordinatama s $A = (R, \theta_A, \varphi_A)$ i $B = (R, \theta_B, \varphi_B)$. Koristeći gornje izraze, infinitezimalni element duljine luka AB možemo izraziti kao

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{(R\mathrm{d}\theta)^2 + (R \sin\theta \mathrm{d}\varphi)^2}$$

gdje smo koristili činjenicu da za točke sfere vrijedi $r = R$, pa posljedično i $\mathrm{d}r = 0$.

U daljnjem ćemo tekstu promatrati samo one krivulje koje sijeku svaku *paralelu* (sve točke na sferi koje imaju isti θ) u najviše jednoj točki. Time smo zapravo isključili samo slučaj kada točke A i B leže na istoj paraleli, što se može razmatrati kao u [4, Ch. 2.3], ili pak adekvatnom promjenom koordinatnog sustava. Takve krivulje mogu se zadati eksplicitnim izrazom

$\varphi = \varphi(\theta)$, pa zaključujemo da je

$$\mathrm{d}s = R\sqrt{1 + (\varphi'(\theta)\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta\,,$$

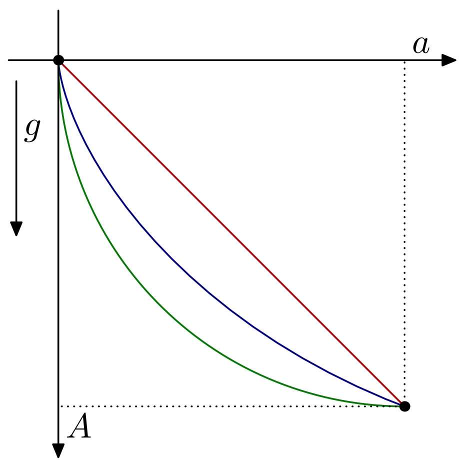
odnosno da je duljina luka krivulje $\varphi = \varphi(\theta)$ između točaka A i B na sferi konstantnog radijusa R dana s

$$S = \int_{AB} \mathrm{d}s = R\int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1 + (\varphi'(\theta)\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

Sada se početni problem sveo na traženje funkcije $\varphi = \varphi(\theta)$, klase $C^1([\theta_A, \theta_B])$, za koju je vrijednost integrala S najmanja moguća [7, Ch 4.1.4].

2.3 Problem brahistokrone

Zadatak nam je odrediti glatku funkciju $y : [0, a] \to \mathbb{R}$, čiji će graf predstavljati putanju po kojoj će materijalna točka mase m ispuštena iz ishodišta, pod utjecajem gravitacijske sile i bez trenja, u najkraćem vremenu stići u točku (a, A).



Slika 1: Ilustracija problema brahistokrone

Primijetimo da bi problem, u slučaju da zanemarimo gravitacijsku silu, bio jednak problemu najkraćeg puta, jer bi vrijeme i put bili direktno proporcionalni, pri čemu bi konstantna brzina predstavljala koeficijent proporcionalnosti.

Formulirajmo sada problem matematički: neka je u vertikalnoj ravnini dan koordinatni sustav u kojem y-os ima smjer prema dolje, odnosno u smjeru gravitacijske sile, kao na slici 1. Kao nulto vrijeme uzmimo početak gibanja, a s T označimo vrijeme potrebno da bi se gibanje završilo. Neka je $\varphi(t)$ x-koordinata materijalne točke u trenutku t. Kako se ona giba po grafu funkcije y, onda je položaj čestice u trenutku $t \in [0, T]$ dan s $\vec{r}(t) = (\varphi(t), y(\varphi(t)))$, te uočimo da je funkcija $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ rastuća. Tada je vektor brzine čestice jednak $\vec{r}'(t) = (\varphi'(t), y'(\varphi(t))\varphi'(t))$, odnosno vrijednost brzine jednaka je

$$v(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + (y'(\varphi(t))\varphi'(t))^2} = \varphi'(t)\sqrt{1 + (y'(\varphi(t))^2}$$

Prema zakonu sačuvanja energije ukupna suma potencijalne i kinetičke energije u svakom je trenutku jednaka, odnosno

$$\frac{1}{2}mv^2(t) - mgy(\varphi(t)) = 0\,, \qquad t \in [0, T]\,,$$

gdje je m masa materijalne točke, a g gravitacijska konstanta. Koristeći gornji izraz za v, lako dobivamo

$$\varphi'(t)\sqrt{1 + (y'(\varphi(t))^2} = \sqrt{2gy(\varphi(t))}\,, \quad t \in [0, T]$$

odakle dijeljenjem te integracijom po $t \in [0, T]$, uz zamjenu varijabli $x = \varphi(t)$ slijedi

$$T = \int_0^T \frac{\varphi'(t)\sqrt{1 + (y'(\varphi(t)))^2}}{\sqrt{2gy(\varphi(t))}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}}\mathrm{d}x\,.$$

Konačno, problem smo sveli na traženje funkcije y za koju je gornji integral T najmanji mogući.

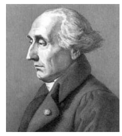
Leonhard Euler (Basel, 15. travnja 1707. – Sankt Petersburg, 18. rujna 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom

3 Pojam varijacije i Euler-Lagrangeova jednadžba

Za daljnji razvoj varijacijskog računa najznačajniji je Leonhard Euler , student Johanna Bernoullija. Bavio se izoperimetričkim problemima[2], te gore opisanim problemom pronalaska najkraće spojnice dviju točaka na sferi.

[2]Originalno, izoperimetrički problem je glasio: Među svim "oblicima" danog opsega, potrebno je pronaći onaj maksimalne površine. Kasnije je taj pojam generaliziran na čitavu klasu problema uvjetne optimizacije, kod kojih je uvjet nekog posebnog oblika.

Međutim najveći doprinos dao je sistematizirajući metode kojima su se do tada rješavali problemi ovog tipa u jedan moćan alat. Zahvaljujući tome, sada je bio u mogućnosti proučavati veliku klasu problema, te na njih primjenjivati stečene rezultate. Neki od tih problema su i razni problemi udaljenosti na plohama, generalizacije problema brahistokrone, problemi uvjetnih ekstrema s izoperimetričkim uvjetima, te mnogi drugi. Euler je bio svjestan da je najveća mana njegovih razmatranja bila preveliko oslanjanje na geometriju, kao što je bio slučaj i s njegovim prethodnicima. Međutim, već 1755. godine Joseph-Louis Lagrange , devetnaestogodišnjak iz Torina, poslao je Euleru pismo koje je sadržavalo detalje nekih njegovih ideja. U svom je prvom pismu, Lagrange pokazao Euleru kako da eliminira nezgrapne geometrijske metode iz svojih rezultata i zamijeni ih jednostavnijim, analitičkim metodama. Dodatno, Lagrange je vrlo brzo razvio zanimljiv način usporedbe dviju funkcija, a zanimljivo je da je Euler, čim je proučio Lagrangeove ideje, odustao od svih svojih dotadašnjih geometrijskih pristupa varijacijskom računu i zamijenio ih analitičkima. Jedna od tih ideja uključivala je korištenje posebnog linearnog operatora, koji je Lagrange nazvao varijacija, te je zbog toga Euler tu problematiku nazvao *varijacijski račun*. Tijekom idućih nekoliko godina, Euler i Lagrange, uvođenjem pojma prve varijacije funkcionala, a potom i onoga što je danas poznato kao Euler-Lagrangeova jednadžba, postavit će snažne temelje u razvoju varijacijskog računa.



Joseph-Louis Lagrange (Torino, 25. siječnja 1736. – Pariz, 10. travnja 1813.), talijanski matematičar i astronom, kršten kao "Giuseppe Lodovico Lagrangia", ali je zbog očevog francuskog porijekla i činjenice da je zadnju trećinu života proveo u Parizu (prije toga je bio profesor u Torinu i, kasnije, u Berlinu), ostao zapamćen po frankofoniziranom imenu "Joseph-Louis Lagrange". Svoj prvi rad objavio je pod imenom "Luigi De la Grange Tournier", a D'Alembert ga spominje kao "monsieur de la Grange".

Prisjetimo se da je problem kojim se bavimo nalaženje (lokalnih) ekstrema funkcionala

$$I(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x$$

na skupu $\mathcal{C} := \{y \in \mathrm{C}^1([a,b]) \ : \ y(a) = A, y(b) = B\}$, za dane realne brojeve $a < b$, A i B, te podintegralnu funkciju $L \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3)$ koju nazivamo *lagrangian*[3].

Napomena 3.1. Ako malo bolje pogledamo lagrangian u problemu brahistokrone, vidjet ćemo da nije definiran u svim točkama iz $\mathbb{R}^3$, kao ni da skup funkcija po kojem minimiziramo ne odgovara gornjem skupu $\mathcal{C}$. Međutim, namjera nam je pokazati osnovnu (Lagrangeovu) ideju varijacijskog računa bez ulaženja u neke tehničke detalje, pa se stoga nećemo ovdje baviti nekim drugim domenama za lagrangian, iako dobiveni rezultati vrijede i u tim općenitijim situacijama.

Pretpostavimo sada da je $y_0 \in \mathcal{C}$ minimum funkcionala I na $\mathcal{C}$ (za maksi-

[3]Naziv nosi u čast Joseph-Louisu Lagrangeu

mum je zaključivanje analogno). Prema definiciji minimuma, to znači da za svaki $y \in \mathcal{C}$ vrijedi $I(y_0) \leq I(y)$. Ova nejednakost vrijedi posebno i za funkcije oblika

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x) \ \in \mathcal{C}, \tag{2}$$

za proizvoljan (fiksni) $\eta \in \mathcal{D} := \{\mu \in \mathrm{C}^1([a,b]) : \mu(a) = \mu(b) = 0\}$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dakle, za fiksnu funkciju η vrijedi

$$I(y_0) \leq I(y_0 + \varepsilon\eta)\,, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\,,$$

što povlači da je $\varepsilon = 0$ točka minimuma glatke funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane s

$$\varepsilon \mapsto I(y_0 + \varepsilon\eta) = \int_a^b L(x, y_0(x) + \varepsilon\eta(x), y_0'(x) + \varepsilon\eta'(x))\mathrm{d}x.$$

Sada iz nužnog uvjeta ekstrema za funkciju jedne varijable slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(I(y_0 + \varepsilon\eta)\right)_{|\varepsilon=0} = 0. \tag{3}$$

Gornji je izraz Lagrange nazivao varijacija funkcionala I, a danas je uobičajeni naziv *prva varijacija*.

Napomena 3.2. Jednakost (3) može se lako izvesti i uz slabiju pretpostavku da je y_0 točka lokalnog ekstrema.

Deriviranjem te korištenjem činjenice da integral glatke funkcije i derivacija komutiraju [14] slijedi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} I(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} &= \\ &= \int_a^b \Big(\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta(x) + \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\eta'(x)\Big)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom prvog člana u gornjem integralu dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} I(y_0 + \varepsilon\eta)_{|\varepsilon=0} &= \int_a^b \eta'(x)\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\mathrm{d}x + \\ &+ \int_a^x \partial_2 L(s, y_0(s), y_0'(s))\mathrm{d}s\, \eta(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b \eta'(x) \int_a^x \partial_2 L(s, y_0(s), y_0'(s))\mathrm{d}s\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Kako vrijedi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, to drugi član u gornjoj sumi iščezava, pa (3) postaje

$$\int_a^b \eta'(x)\Big(\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \int_a^x \partial_2 L(s, y_0(s), y_0'(s))\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Zbog proizvoljnosti funkcije $\eta \in \mathcal{D}$ izraz (4) nije *dobar alat* za pronalaženje funkcija y_0 koje ga zadovoljavaju. Zato će nam od velike važnosti biti sljedeći teorem.

Teorem 3.1. *Ako za neprekidnu funkciju $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int_a^b \varphi(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = 0$$

za svaku $\eta \in \mathrm{C}^1([a,b])$ za koju je $\eta(a) = \eta(b) = 0$, onda je φ konstantna funkcija.

Dokaz. Označimo s c srednju vrijednost funkcije φ:

$$c := \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x\,, \tag{5}$$

te neka je

$$\eta(x) := \int_a^x (\varphi(s) - c)\,\mathrm{d}s\,, \quad x \in [a,b].$$

Uočimo da je $\eta \in \mathrm{C}^1([a,b])$, te vrijedi $\eta(a) = \eta(b) = 0$ i $\eta'(x) = \varphi(x) - c$. Zbog (5) je

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \varphi(x)\eta'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)(\varphi(x) - c)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \varphi(x)(\varphi(x) - c)\mathrm{d}x - \int_a^b c(\varphi(x) - c)\mathrm{d}x = \int_a^b (\varphi(x) - c)^2\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

odakle lako slijedi da je $\varphi \equiv c$. ☐

Primjenom gornjeg teorema na jednakost (4) zaključujemo da je za svaki $x \in [a, b]$

$$\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \int_a^x \partial_2 L(s, y_0(s), y_0'(s)) \mathrm{d}s = c \in \mathbb{R}\,.$$

Kako je drugi član u gornjoj razlici funkcija klase $\mathrm{C}^1([a, b])$, zaključujemo da to mora biti i prvi član, te konačno deriviranjem dobivamo

$$\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0.$$

Gornja obična diferencijalna jednadžba [1] za funkciju y_0 naziva se *Euler-Lagrangeova*[4] *jednadžba* i nužan je uvjet da bi funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ bila ekstrem funkcionala I. Svaku funkciju $y_0 \in \mathcal{C}$ koja ju zadovoljava nazivamo *stacionarna funkcija* funkcionala I.

Napomena 3.3. Uočimo da je Euler-Lagrangeova jednadžba obična diferencijalna jednadžba drugog reda za funkciju y_0. Međutim to ne znači nužno da je ekstremalna funkcija y_0 klase $\mathrm{C}^2([a, b])$, jer se primjerice može desiti da drugi član jednadžbe iščezava (vidi [10, str. 16]). Međutim može se pokazati [10, str. 17] da y_0 ima neprekinutu drugu derivaciju u svim točkama $x \in [a, b]$ u kojima je $\partial^2_{33} L(x, y_0(x), y_0'(x)) \neq 0$.

Napomena 3.4. Prije smo već napomenuli da je gornji račun moguće provesti i uz nešto drugačije pretpostavke na lagrangian L i skup $\mathcal{C}$ po kojem minimiziramo. Za izvod Euler-Lagrangeove jednadžbe bitno je da vrijedi izraz (4) za dovoljno veliku klasu *dopustivih funkcija* η, tako da možemo primijeniti teorem 3.1, odnosno njegove varijante. Pri tome je *dopustiva* svaka funkcija η za koju vrijedi (2) za svaki ε iz neke okoline točke 0.

3.1 Posebni slučajevi Euler-Lagrangeove jednadžbe

Ukoliko je lagrangian L posebnog oblika, Euler-Lagrangeova jednadžba može se dodatno pojednostavniti. To će nam biti posebno korisno u rješavanju konkretnih problema. Najzanimljiviji među njima sljedeći su slučajevi:

Kada *lagrangian L ne ovisi eksplicitno o y'*, tada je $\partial_3 L = 0$ pa Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$\partial_2 L(x, y(x)) = 0.$$

[4] U literaturi (npr. [10]) se često naziva i samo *Eulerova jednadžba*

U slučaju kada *lagrangian* L *ne ovisi eksplicitno o* y, tada je $\partial_2 L = 0$, pa Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\partial_{y'} L(x, y'(x)\right) = 0,$$

što je pak ekvivalentno s

$$\partial_{y'} L(x, y'(x)) = \mathrm{c}, \quad \text{za neki } \mathrm{c} \in \mathbb{R}.$$

U slučaju kada *lagrangian* L *ne ovisi eksplicitno o* x, tada je $\partial_1 L = 0$. Pomnožimo li Euler-Lagrangeovu jednadžbu s y' dobivamo

$$y'\frac{\partial L}{\partial y} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0. \tag{6}$$

Iskoristimo li formulu za složeno deriviranje na $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$ slijedi da je

$$\frac{\partial L}{\partial y}y' = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial L}{\partial y'}y''. \tag{7}$$

Uvrstimo li izraz (7) u jednakost (6) dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial L}{\partial y'}y'' - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0.$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}y'\right) = \frac{\partial L}{\partial y'}y'' + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right),$$

to slijedi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(L - \frac{\partial L}{\partial y'}y'\right) = 0,$$

što je ekvivalentno s

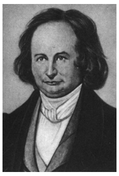
$$L(y(x), y'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y'}(y(x), y'(x))y'(x) = \mathrm{c}, \quad \text{za neki } \mathrm{c} \in \mathbb{R}.$$

Gornji izraz poznat je pod nazivom *Beltramijev identitet* .

Eugenio Beltrami (Cremona, 16. studenoga 1835. – Rim, 18. veljače 1900.), talijanski matematičar

4 Dovoljan uvjet ekstrema

Adrien-Marie Legendre (Pariz, 18. rujna 1752. – Pariz, 10. siječnja 1833.), francuski matematičar



Carl Gustav Jacobi (Potsdam, 10. prosinca 1804. – Berlin, 18. veljače 1851.), njemački matematičar

Sir William Rowan Hamilton (Dublin, 3/4 kolovoza 1805. – Dublin, 2. rujna 1865.), irski matematičar i astronom

Daljnji razvoj varijacijskog računa nastavlja koje desetljeće kasnije, francuski matematičar Adrien-Marie Legendre, koji je počeo razvijati teoriju klasifikacije ekstrema na minimume i maksimume. Motiviran Taylorovim teoremom, Legendre uvođenjem pojma *druge varijacije*, dolazi do nužnih uvjeta koji će mu omogućiti razlikovanje tipa ekstrema funkcije. Međutim, unatoč činjenici da je bio na dobrom tragu, nije uspio pokazati da je dobiveni rezultat ujedno i nužan i dovoljan. Iako idejno dobri, njegovi rezultati sadržavali su nekoliko grešaka, koje su mu onemogućavale daljnji napredak. Tek pedesetak godina kasnije, njegovu teoriju nastavio je razvijati Carl Gustav Jacobi , koji je uspio upotpuniti Legendreove rezultate o nužnim i dovoljnim uvjetima postojanja ekstrema. Otprilike u isto vrijeme je Hamilton objavio dva rada o mehanici u kojima, koristeći Lagrangeove ideje, pokazuje da se gibanje čestice u polju sile može svesti na proučavanje dviju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Jacobi je upotpunio njegove radove, te pokazao da je dovoljna samo jedna od tih jednadžbi, danas poznata kao *Hamilton-Jacobijeva jednadžba*. Time su udarili temelje onome što je danas poznato kao *Hamilton-Jacobijeva teorija* u klasičnoj mehanici, te time i ukazali na važnost varijacijskog računa u fizici. Mi ovdje nećemo prikazivati (Legendreove i Jacobijeve) dovoljne uvjete ekstrema, nego ćemo krenuti u nešto drugačijem smjeru.

Do sada smo razvili alate za određivanje kandidata za (lokalni) ekstrem funkcionala I. Postavlja se pitanje kako provjeriti koje od stacionarnih funkcija zaista jesu (lokalni) ekstremi. Pokazuje se da se sličnim razmišljanjem kao za realne funkcije realne varijable mogu dobiti dovoljni uvjeti (lokalnog) ekstrema koji uključuju *drugu varijaciju* funkcionala I (za više vidi npr. [7, 13]). Međutim, u nekim slučajevima nam nije potrebna druga varijacija za izvođenje zaključaka o tipu ekstrema. Prisjetimo se da kod minimizacije konveksne realne funkcije jedne varijable svaka stacionarna točka te funkcije ujedno je i njen globalni minimum [4, str 41.]. Analogna tvrdnja vrijedi za konkavne funkcije i globalni maksimum. Slične tvrdnje mogu se izvesti i za varijacijske probleme. Prije daljnjeg razmatranja podsjetimo se osnova konveksne analize (promatrat ćemo samo konveksne funkcije, za konkavne vrijede analogni rezultati).

Za skup $M \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan, ukoliko za svaka njegova dva elementa $x_1,\ x_2 \in M$ vrijedi da je i njihova spojnica $\{(1-t)x_1 + tx_2 : t \in [0,1]\}$ sadržana u M. Za realnu funkciju f, definiranu na konveksnom skupu $M \subset \mathbb{R}^n$, kažemo da je konveksna na M ukoliko je

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(\forall t \in [0,1]) \quad f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)\,.$$

Konveksnost funkcije, posebno one više varijabli, općenito nije jednostavno provjeriti iz same definicije. Stoga se često koriste razne karakterizacije koje uključuju (parcijalne) derivacije funkcije.

Teorem 4.1. [4, str. 41.] Neka je $M \subset \mathbb{R}^2$ konveksan skup i $f \in C^2(M)$. Funkcija f je konveksna na M ako i samo ako za svaki $(x, y) \in M$ vrijedi

$$\begin{aligned} \partial_{11}^2 f(x,y) &\geq 0 \\ \partial_{22}^2 f(x,y) &\geq 0 \\ \partial_{11}^2 f(x,y)\partial_{22}^2 f(x,y) - (\partial_{12}^2 f(x,y))^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Lema 4.1. [4, str 42.] *Ukoliko je $f \in C^1(M)$ konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu $M \subset \mathbb{R}^n$, tada za svaka dva $x_1, x_2 \in M$ vrijedi*

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1) \cdot (x_2 - x_1).$$

Geometrijska interpretacija nejednakosti iz gornje leme je da se graf funkcije f nalazi iznad svake tangencijalne ravnine na taj graf. Uvjeti koji će nam garantirati da je stacionarna funkcija y_0 funkcionala I ujedno i njegov minimum bit će usko vezani za konveksnost tog funkcionala. Međutim, lako se može vidjeti da je konveksnost funkcionala I vezana uz konveksnost pripadnog lagrangiana L.

Teorem 4.2 (Dovoljan uvjet ekstrema)**.** *Ukoliko je lagrangian L funkcionala I klase $C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ i konveksan po zadnje dvije varijable (y i y'), onda je svaka funkcija $y_0 \in \mathcal{C}$ koja zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu za I, ujedno globalni minimum danog funkcionala.*

Dokaz. Prema pretpostavci je za svaki $x \in [a, b]$ preslikavanje $(y, y') \mapsto L(x, y, y')$ konveksno na $\mathbb{R}^2$ pa za proizvoljne $y_1, y_2 \in \mathcal{C}$, prema lemi 4.1, vrijedi

$$\begin{aligned} L(x, y_2(x), y_2'(x)) \geq\ & L(x, y_1(x), y_1'(x)) + \\ & + \partial_2 L(x, y_1(x), y_1'(x))(y_2(x) - y_1(x)) + \\ & + \partial_3 L(x, y_1(x), y_1'(x))(y_2'(x) - y_1'(x)). \end{aligned} \tag{8}$$

Neka je $y_0 \in \mathcal{C}$ stacionarna funkcija za I, te neka je $y \in \mathcal{C}$ proizvoljna funkcija. Iz (8) i monotonosti integrala zaključujemo

$$I(y) - I(y_0) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x - \int_a^b L(x, y_0(x), y_0'(x))\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_a^b \partial_2 L(x, y_0, y_0')(y - y_0)\mathrm{d}x + \int_a^b \partial_3 L(x, y_0, y_0')(y' - y_0')\mathrm{d}x\,.$$

Parcijalnom integracijom drugog integrala u gornjem izrazu dobivamo

$$I(y) - I(y_0) \geq \partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))(y(x) - y_0(x))\Big|_{x=a}^{b} +$$

$$+ \int_a^b \left(\partial_2 L(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_3 L(x, y_0(x), y_0'(x))\right)(y(x) - y_0(x))\mathrm{d}x.$$

Kako su $y_0, y \in \mathcal{C}$, to prvi član u gornjoj sumi iščezava, a budući da je y_0 stacionarna funkcija za I, to iščezava i drugi član. Stoga je

$$I(y) - I(y_0) \geq 0, \text{ za svaki } y \in \mathcal{C}\,,$$

odnosno y_0 je (globalni) minimum funkcionala I. □

Napomena 4.1. Ukoliko lagrangian nije definiran na cijelom $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, što između ostalog znači da i funkcije iz skupa $\mathcal{C}$ po kojem radimo minimizaciju (ili njihove derivacije) ne mogu poprimiti sve vrijednosti iz $\mathbb{R}$, kao što je slučaj kod problema brahistokrone, onda bi tvrdnja prethodnog teorema vrijedila uz pretpostavku da je za svaki $x \in [a, b]$, skup

$$M_x := \{(y(x), y'(x)) : y \in \mathcal{C}\}$$

konveksan, te da je funkcija $(y, y') \mapsto L(x, y, y')$ konveksna na M_x [4, str 45–46].

Napomena 4.2. Ukoliko je lagrangian konveksan po zadnje dvije varijable onda se koristeći linearnost i monotonost integrala lako može provjeriti da je i funkcional I konveksan.

5 Primjene na ranije promatrane primjere

5.1 Problem najkraćeg puta

Prisjetimo se da smo *problem najkraćeg puta* sveli na traženje funkcije $y \in \mathcal{C}$ za koju je vrijednost integrala

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\mathrm{d}x$$

najmanja moguća. Pripadni lagrangian dan je s $L(x,y,y') = \sqrt{1+(y'(x))^2}$, te se Euler-Lagrangeova jednadžba svodi na

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c\,,$$

za proizvoljnu realnu konstantu c. Lako se vidi da je rješenje ove diferencijalne jednadžbe dano s $y(x) = c_1 x + c_2$, pri čemu su c_1, c_2 neke realne konstante čiju vrijednost lako odredimo iz rubnih uvjeta $y(a) = A$ i $Y(b) = B$: $c_1 = \frac{A-B}{a-b}$, $c_2 = A - a\frac{A-B}{a-b}$. Konačno, jedina stacionarna funkcija je pravac kroz točke (a,A), (b,B), dan jednadžbom

$$y(x) - A = \frac{A-B}{a-b}(x-A).$$

Kako je

$$\partial^2_{yy} L = 0, \quad \partial^2_{yy'} L = 0\,, \quad \partial^2_{y'y'} L = \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} > 0\,,$$

to je prema teoremu 4.1 lagrangian konveksan po zadnje dvije varijable, pa iz teorema 4.2 slijedi da je ta stacionarna funkcija ujedno i globalni minimum funkcionala S, odnosno najkraći put između dvije točke ravnine je dužina određena tim točkama.

5.2 Geodetska krivulja na sferi

Problem pronalaska *najkraćeg puta na sferi* sveli smo na traženje funkcije $\varphi = \varphi(\theta)$, klase $C^1([\theta_A, \theta_B])$, za koju je vrijednost integrala

$$S = R\int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1+(\varphi'(\theta)\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

minimalna.

Kako je lagrangian dan izrazom $L(\theta,\varphi,\varphi') = \sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}$, to se φ u L ne pojavljuje eksplicitno, pa se Euler-Lagrangeova jednadžba svodi na

$$\frac{\sin^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+(\varphi'\sin\theta)^2}} = c \in [0,1), \text{ za neku konstantu c} \in \mathbb{R}\,,$$

odakle lako dobivamo

$$\varphi' = \frac{c}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - c^2}},$$

te direktnom integracijom zaključujemo da φ zadovoljava

$$\cos(\varphi + c_1) = \frac{\tan c_2}{\tan\theta}, \text{ za neke } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

što je pak ekvivalentno s

$$\cos\theta\cos\varphi\cos c_2 - \cos\theta\sin\varphi\sin c_2 = \tan c_1 \sin\theta.$$

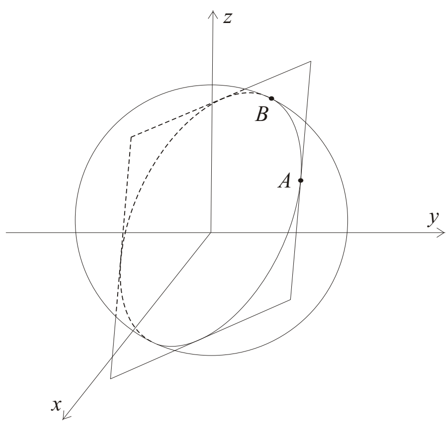
Ukoliko gornju jednadžbu transformiramo u Kartezijeve koordinate dobivamo da tražena krivulja leži u ravnini

$$x\cos c_2 - y\sin c_2 = z\tan c_1,$$

koja prolazi kroz ishodište, tj. središte sfere. Zaključujemo da se stacionarna krivulja nalazi na presjeku sfere i ravnine koja prolazi središtem sfere. Drugim riječima, stacionarna krivulja je dio luka glavne kružnice koja prolazi danim točkama. Da se zaista radi o minimalnoj udaljenosti, slijedit će iz konveksnosti lagrangiana. Naime, iz

$$\partial^2_{\varphi\varphi}L = 0, \quad \partial^2_{\varphi\varphi'}L = 0\,, \quad \partial^2_{\varphi'\varphi'}L = \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{(1+\varphi'^2\sin^2\theta)^3}} \geq 0\,,$$

prema teoremu 4.1 slijedi da je L konveksan u odnosu na zadnje dvije varijable, pa zaključujemo da je dani kružni luk zaista rješenje našeg problema.



Slika 2: Najkraća putanja na sferi odvija se po glavnoj kružnici

Primijetimo još da točke A i B dijele pripadnu kružnicu na dva luka. Geometrijski je jasno da je rješenje onaj luk za čije točke je kut θ iz $[\theta_A, \theta_B]$.

Napomena 5.1. Na sličan način može se pronaći najkraći put između dvije točke na proizvoljnoj plohi.

5.3 Problem brahistokrone

Problem traženja putanje po kojoj će materijalna točka u najkraćem vremenu stići iz ishodišta u točku (a, A) ekvivalentan je [7, Ch 4.1.2] problemu traženja minimuma integrala

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} \mathrm{d}x$$

po skupu $\mathcal{C} := \{y \in \mathrm{C}^1([0, a]; \mathbb{R}^+) : y(0) = 0, y(a) = A, T(y) < +\infty\}$.

Napomena 5.2. Uočimo da je zbog $y(0) = 0$ gornji integral zapravo *nepravi*. Međutim može se pokazati da zaključci poglavlja 3 i 4 vrijede i u ovome slučaju.

Lako se može provjeriti da ovdje lagrangian nije konveksan po zadnje dvije varijable, pa ne možemo primijeniti teorem 4.2. Stoga radimo zamjenu $\tilde{y}(x) = \sqrt{2y(x)}$, te zbog $y' = \tilde{y}\tilde{y}'$, slijedi

$$T(y) = \tilde{T}(\tilde{y}) := \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^a \sqrt{\tilde{y}^{-2}(x) + \tilde{y}'(x)^2} \mathrm{d}x \, ,$$

pa je problem minimizacije funkcionala T po skupu $\mathcal{C}$ ekvivalentan zadaći minimizacije funkcionala $\tilde{T}$ po $\tilde{\mathcal{C}} := \{\tilde{y} \in \mathrm{C}^1([0, a]; \mathbb{R}^+) : \tilde{y}(0) = 0, \, \tilde{y}(a) = \sqrt{2A}, \tilde{T}(\tilde{y}) < +\infty\}$ (uočimo da je preslikavanje $y \mapsto \tilde{y}$ bijekcija $\mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$). Lagrangian funkcionala $\tilde{T}$ dan je s

$$L(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = \sqrt{\tilde{y}^{-2}(x) + \tilde{y}'(x)^2} \, ,$$

pa iz

$$\partial^2_{\tilde{y}\tilde{y}} L = \frac{2 + 3\tilde{y}^2\tilde{y}'^2}{\tilde{y}^6 \sqrt{(\tilde{y}^{-2} + \tilde{y}'^2)^3}} > 0, \quad \partial^2_{\tilde{y}'\tilde{y}'} L = \frac{1}{\sqrt{\tilde{y}^{-2} + \tilde{y}'^2}(1 + \tilde{y}^2\tilde{y}'^2)}$$

$$\partial^2_{\tilde{y}\tilde{y}'}L = \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}^3\sqrt{(\tilde{y}^{-2}+\tilde{y}'^2)^3}}, \quad \partial^2_{\tilde{y}\tilde{y}}L\partial^2_{\tilde{y}'\tilde{y}'}L - \partial^2_{\tilde{y}\tilde{y}'}L = \frac{2}{(\tilde{y}+\tilde{y}^3\tilde{y}'^2)^2} > 0,$$

prema teoremu 4.1 slijedi da je L konveksna po zadnje dvije varijable, te je svaka stacionarna funkcija ujedno globalni minimum funkcionala I.
Kako se u lagrangianu varijabla x ne pojavljuje eksplicitno, to Euler-Lagrangeovu jednadžbu možemo zamijeniti Beltramijevim identitetom

$$\sqrt{\tilde{y}(x)^{-2}+\tilde{y}'(x)^2} - \tilde{y}'(x)\frac{\tilde{y}'(x)}{\sqrt{\tilde{y}(x)^{-2}+\tilde{y}'(x)^2}} = c, \quad \text{za neki c} \in \mathbb{R}.$$

Transformacijom gornjeg izraza dolazimo do

$$\tilde{y}^2(x)(1+\tilde{y}^2(x)\tilde{y}'(x)^2) = \frac{1}{c^2},$$

što vraćanjem y umjesto $\tilde{y}$, uz supstituciju $d := \dfrac{1}{2c^2} > 0$, prelazi u

$$y'^2(x) = \frac{d-y}{y},$$

odnosno

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 = \frac{y}{d-y}.$$

Da bismo riješili tu diferencijalnu jednadžbu uvodimo novu varijablu θ i zamjenu $y(\theta) = \frac{d}{2}(1-\cos\theta) = d\sin\frac{\theta}{2}$. Uočimo da je $\theta = 0$, za $y = 0$, te da θ raste s y za $\theta \leq \pi$. Tada gornja diferencijalna jednadžba postaje

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{d^2}{4}\sin^2\theta\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta},$$

odakle lako dobivamo

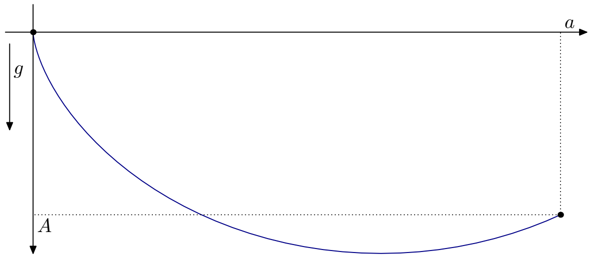
$$x(\theta) = \pm\frac{d}{2}(\theta-\sin\theta)+e,$$

gdje je e neka konstanta. Iz početnog uvjeta prema kojem točka kreće s gibanjem iz ishodišta, lako slijedi da je $e = 0$, pa zbog $x \geq 0$ konačno dobivamo parametarsku jednadžbu tražene krivulje

$$x(\theta) = \frac{d}{2}(\theta-\sin\theta,) \tag{9}$$

$$y(\theta) = \frac{d}{2}(1-\cos\theta). \tag{10}$$

Konstanta d računa se iz drugog rubnog uvjeta $y(a) = A$, a dobivena krivulja dobro nam je poznata cikloida. Pripadni $\tilde{y}$ je stacionarana točka funkcionala $\tilde{T}$, a zbog konveksnosti lagrangiana to je ujedno i točka minimuma. Stoga je cikloida krivulja po kojoj će se tijelo najbrže spustiti.



Slika 3: Brahistokrona je cikloida

6 Još par povijesnih činjenica

Završit ćemo ovaj rad spominjanjem doprinosa još nekih matematičara varijacijskom računu: sredinom 19. stoljeća mnogi su se matematičari, poput Riemanna i Dirichleta , bavili rješavanjem raznih rubnih i početno-rubnih zadaća za parcijalne diferencijalne jednadžbe koje opisuju razne fizikalne pojave. Tu se varijacijski račun često pojavljuje kao prirodna veza s takvim zadaćama. Jedan od problema, do čijeg rješenja je Riemann došao primjenom do tada poznatih principa varijacijskog računa je i čuvena Dirichletova zadaća: treba pronaći glatko rješenje Laplaceove parcijalne diferencijalne jednadžbe u nekoj ograničenoj domeni, koje je na rubu te domene jednako danoj funkciji. Međutim, Riemannovo rješenje imalo je konceptualnu grešku, koja se sastoji u tome da je zanemario pitanje postojanja minimuma integralnog funkcionala, koji se prirodno pojavljuje uz Dirichletovu zadaću. Ilustrirajmo Riemannovu grešku: ako pokažemo da funkcional (1) ima samo jednu stacionarnu funkciju, možemo li zaključiti da je to (lokalni) minimum (recimo da je iz fizikalnih ili nekih drugih razloga jasno da ne može biti maksimum)? Odgovor je *ne*, zato što ne znamo da li minimum uopće postoji (osim ako funkcional nije konveksan, ili zadovoljava neke druge uvjete koji osiguravaju postojanje minimuma). Naime izvod Euler-Lagrangeove jednadžbe, čija su rješenja stacionarne funkcije napravljen je *uz pretpostavku da minimum postoji*. Stoga, ako je ta pretpostavka kriva, cijela teorija nije nam od neke koristi. Njemački matematičar

Georg Friedrich Bernhard Riemann (17. rujna 1826. – 20. srpnja 1866.), njemački matematičar

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Doren, 13. veljače 1805. – Gottingen, 5. svibnja 1859.), njemački matematičar

Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, Normandija, Francuska, 23. ožujka 1749. – Pariz, 5. ožujka 1827.), francuski matematičar i astronom

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 31. listopada 1815. – Berlin, 19. veljače 1897.), njemački matematičar

Augustin Louis Cauchy (Pariz, 21. kolovoza 1789. – Sceaux, 23. svibnja 1857.), francuski matematičar

Karl Weierstrass među prvima je ukazao na tu grešku. Naime, dotadašnjim rezultatima varijacijskog računa u pravilu je nedostajala matematička strogoća koja se počinje razvijati tek radovima Cauchyja , te upravo Riemanna i Weierstrassa, i danas je standard u matematici. Weierstrass je, između ostalog, prvi ukazao na važnost skupa $\mathcal{C}$ po kojem se minimizira, te je prvi dao u potpunosti korektan dokaz *dovoljnih uvjeta minimuma*, te je svojim preciznim rezultatima zaokružio priču o *ranom varijacijskom računu* [9].

Literatura

[1] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, PMF - Matematički odjel, Zagreb 2001.

[2] G. Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, Springer-Verlag 2002.

[3] J. S. Bardi, *The calculus wars, Newton, Leibniz, and the greatest mathematical clash of all time*, Tunder's Mouth Press, New York 2006.

[4] U. Brechteken-Mandersch, *Introduction to the Calculus of Variations*, Chapman and Hall 1991.

[5] G. Buttazzo, *A survey on the Newton problem of optimal profiles*, http://cvgmt.sns.it/media/doc/paper/1339/BUTTAZZO.PDF

[6] G. Buttazzo, B. Kawohl, *On Newton's problem of minimal resistance*, Math. Intelligencer, **15** (1993.), 7–12

[7] A. Cherkaev, E. Cherkaev, *Calculus of Variations and Applications*, Lecture Drafts 2003.

[8] U. Diwekar, *Introduction to applied optimization*, Springer, London 2003.

[9] J. Ferguson, *A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications*, University of Victoria

[10] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Second Edition, Dover Publications, 2000.

[11] H. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, Heidelberg 1980.

[12] S. Mandelstam, W. Yourgrau, *Variational Principle in Dynamics and Quantum Theory*, Pitman & Sons, London 1968.

[13] H. Sagan , *Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications; Reprint edition (December 21, 1992.)

[14] Š. Ungar, *Matematička analiza u* R^n, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2005.