

スペクトラム密度関数と平均パワ に関する新しい解析方法*

有 本 卓**

On a New Approach to Power Density Spectrum and Average Power

Suguru ARIMOTO

In this paper, a new approach to the analysis of power-density spectrum and average power is proposed, based upon the concept of state and matrix theory.

A covariance matrix equation which is dual to the well-known matrix equation for the calculation of the mean-square deviation is derived and used in representing the power-density spectrum and the average power of the error in the time domain.

1. 序 論

ここ数年来、最適制御理論の発展に伴って、対象とする制御系を状態変数ベクトルと行列で微分方程式系として表わし、その方程式の性質に基づいて制御系の解析を進める方法が一般的になった。そして、かなり不明確な表現ではあるが、このような手法に基づく制御理論を“modern control theory”などと称している。

しかしながら、このいわゆる state-space method と古典的なラプラス変換に基づいた周波数領域での解析方法との接点を調べ、古典的な方法と現代的な方法とのつながりを示している研究論文はいまだに数少ない。

この論文では、スペクトラム密度関数と平均パワに関する解析に state-space method を適用してみる。

ここで述べられる解析方法は、主として、次節で導入される共分散行列の方程式（これは Liapunov の方程式を拡張したものに双対になっている）の解析に基づいている。

ここでは、系が線形で定常的な連続な動的システムで表わされる場合のみを考察するが、線形で定常的なサンプル値系についてもほぼ同様な議論ができる。

なお、これらの方法が不規則外乱を受けている制御系の解析、あるいはある種の最適制御問題に有効であることは、すでに、二、三の論文に示されている^{1),2)}。

2. 共分散行列の方程式

つぎのように2つの方程式で表わされる制御系について考えよう。

$$dx(t)/dt = Fx(t) + Gv(t) \quad \dots\dots(1-a)$$

$$y(t) = Hx(t) \quad \dots\dots(1-b)$$

ここに、

$x(t)$: n 次元状態ベクトル、

$v(t)$: r 次元入力ベクトル、

$y(t)$: p 次元出力ベクトル、

F : $n \times n$ の定数行列、

G : $n \times r$ の定数行列、

H : $p \times n$ の定数行列、

である。また、 $v(t)$ は白色雑音で、つぎの性質を持つものとする。

$$E[v(t)] = 0, \quad Cov(v(t), v(\tau)) = R\delta(t-\tau) \quad \dots(2)$$

ここに、 E は expectation, Cov は covariance (共分散) を意味しており、 δ は Dirac のデルタ関数である。 R は $r \times r$ の対称で正定値な行列である。最後に、行列 F は安定である。すなわち、 F の固有値はすべて負の実部を持つものとする。

そこで、状態ベクトル $x(t)$ の共分散行列を求めてみよう。そのためにまず

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \exp\{F(t-\tau)\} Gv(\tau) d\tau$$

であることに注意する。そうすると

$$Cov(x(t), x(t)) = E[x(t)x'(t)]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \exp\{F(t-\tau)\} Gv(\tau)v(\theta)G'\right]$$

* 昭和40年6月28日受付

** 東京大学工学部

$$\begin{aligned} & \times \exp \{F'(t-\theta)\} d\tau d\theta \\ = & \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \exp \{F(t-\tau)\} GR\delta(t-\tau)G' \\ & \times \exp \{F'(t-\theta)\} d\tau d\theta \\ = & \int_{-\infty}^t \exp \{F(t-\tau)\} GRG' \exp \{F'(t-\tau)\} d\tau \\ = & \int_0^{\infty} \exp (Ft) GRG' \exp (F't) dt \triangleq X \quad \dots\dots (3) \end{aligned}$$

となる。ここに、行列あるいはベクトルの肩のプライム記号はそれらの転置を意味するものとする。(3)式を微分すると、つぎの方程式が導かれる。

$$FX + XF' = -GRG' \quad \dots\dots (4)$$

このように、状態ベクトル $x(t)$ の共分散行列 X は(4)式を解いて得られる行列 X になっていることがわかる。

方程式(4)に関しては、行列論から、 F が安定であればいつでも non-negative definite な対称行列 X が一意的存在することが知られている³⁾。

一方、(1-a)式において外乱 $v(t)$ がない場合 ($v(t) = 0$)；つぎのような2乗偏差 (total square deviation) を計算してみよう。ただし、 Q は $p \times p$ の正定値行列とする。

$$J(x(0)) = \int_0^{\infty} y'(t) Q y(t) dt \quad \dots\dots (5)$$

そのとき、よく知られているように、 $J(x(0))$ は2次形式で

$$J(x(0)) = x'(0) Y x(0) \quad \dots\dots (6)$$

と表わされる³⁾。ここに対称行列 Y はつぎの方程式の解である。

$$F'Y + YF = -H'QH \quad \dots\dots (7)$$

(4)式と(7)式はつぎのような変換でお互いに互対になっている。

$$F \leftrightarrow F', \quad G \leftrightarrow H', \quad R \leftrightarrow Q \quad \dots\dots (8)$$

3. 共分散行列の方程式の性質

共分散行列の方程式(4)についてもう少し詳しく調べてみよう。そのために Kalman が定義した可制御性と可観測性を導入しておく⁴⁾。

定義(i) 対 (F, G) はつぎのことが成立するとき完全可制御であるという。

$$\text{rank} [G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n \quad \dots\dots (9)$$

定義(ii) 対 (F, H) は対 (F', H') が完全可制御であるとき完全可観測であるという。

方程式(4)に関してつぎのような定理が得られる。

定理1 つぎの3つの条件のうち2つが成立すれば残りの1つも成立する。

- (a) 対 (F, G) は完全可制御である。
- (b) F は安定である。
- (c) 対称行列 X は正定値である。

この定理は文献(2)に述べられた証明方法を拡張して用いれば証明できる。方程式(8)に関する類似の結果が成立する。これはまた線形で定常な微分方程式に関する Liapunov の安定性の定理の拡張にもなっている。

つぎに、方程式(4)を周波数領域で表現しよう。方程式(4)から

$$(j\omega I - F)X + X(-j\omega I - F') = GRG' \quad \dots\dots (10)$$

が得られる。ここに I は $n \times n$ の単位行列である。

(10)式に左から $H(j\omega I - F)^{-1}$ を右から $(-j\omega I - F')^{-1}H'$ を乗ずれば

$$\begin{aligned} & H(j\omega I - F)^{-1}XH' + HX(-j\omega I - F')^{-1}H' \\ & = H(j\omega I - F)^{-1}GRG'(-j\omega I - F')^{-1}H' \quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

が得られる。(11)式の右辺の $H(sI - F)^{-1}G$ は(1-a)、(1-b)式に示される制御系の入力 $v(t)$ と出力 $y(t)$ に関する伝達行列である。したがって、それを

$$D(s) = H(sI - F)^{-1}G \quad \dots\dots (12)$$

と表わすことにする。

そこで Parseval の等式の拡張ともいうべき、つぎのような定理を示そう。

定理2 F が安定であればつぎの式が成立する。

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y(t), y(t)) &= HXH' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(j\omega)RD'(-j\omega) d\omega \quad \dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに、 X は(4)の解である。

(証明) まず、前半はつぎのようにして示される。

$$\text{Cov}(y(t), y(t)) = E[Hx(t)x'(t)H'] = HXH'$$

後半の証明にはいる前に、有理式

$$\phi(s) = \frac{z_{n-1}s^{n-1} + \dots + z_0}{s^n + f_{n-1}s^{n-1} + \dots + f_0} \quad \dots\dots (14)$$

についてつぎのような積分公式が成立することに注意しよう。

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\text{Re}[\phi(j\omega)] d\omega = z_{n-1} \quad \dots\dots (15)$$

ここに、 $\phi(s)$ は s -平面の虚軸上と右半面で正則であ

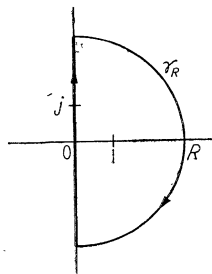


Fig. 1

Path of integration for the calculation of equation (27)

ると仮定しておく。いま、積分路を Fig. 1 のようにとる。そうすると

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_R} 2\psi(s) ds = 0 \quad \dots\dots (16)$$

となる。(16)式を書きなおすと

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R 2\psi(j\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(Re^{j\theta}) Re^{j\theta} d\theta$$

を得る。この式の第2項については、

$$\psi(Re^{j\theta}) Re^{j\theta} = z_{n-1}(1+R^{-1}\psi(j\theta))$$

が成立している。ここに $|\psi(j\theta)| < \text{const.}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\psi(j\omega) d\omega &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(Re^{j\theta}) Re^{j\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z_{n-1} d\theta = z_{n-1} \quad \dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。(17)式の実部をとると(15)式が得られる。さて、行列 $(sI-F)^{-1}$ の各要素は共通な分母 $\det(sI-F)$ を持ち、その分子はすべて $n-1$ 次以下の多項式である。しかも、ちょうど $n-1$ 次の多項式は対角線要素のみに現われ、そのときの s^{n-1} の係数はすべて1である。したがって、積分公式(15)から

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\text{Re}(j\omega I - F)^{-1} d\omega = I$$

となる。行列 $(-sI-F')^{-1}$ についても同様である。そこで、(13)式の右辺は実部のみを取って積分しても変わらないことに注意すれば、(11)式の両辺の実部を取って積分することにより(13)式を得る(証明おわり)。つぎに(4)式と(7)式の双対関係を量的に表現してみよう。

定理 3 F が安定であればつぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} E[y'(t)Qy(t)] &= \text{trace}[H'QH X] \\ &= \text{trace}[YGRG'] \quad \dots\dots (18) \end{aligned}$$

(証明) 前半はつぎのようにして示される。

$$\begin{aligned} E[y'(t)Qy(t)] &= E[x'(t)H'QHx(t)] \\ &= E[\text{trace}[H'QHx(t)x'(t)]] \\ &= \text{trace}[H'QH[E[x(t)x'(t)]]] \\ &= \text{trace} H'QH X. \end{aligned}$$

後半については、(4)式と(7)式から

$$\begin{aligned} \text{trace}[H'QH X] &= -\text{trace}[F'YX + YFX] \\ &= -\text{trace}[YXF' + YFX] = \text{trace} YGRG' \end{aligned}$$

となる(証明おわり)。

この結果を利用すると文献 2) の主要な定理 2 を多入力・多出力の場合に拡張することができる。

4. 1 入力, 1 出力の場合

(1-a), (1-b) 式で表わされる系が1入力, 1出力である場合を考える。そのとき、行列 G の代わりに n

次の縦ベクトル g , 行列 H の代わりに n 次の横ベクトル h を用いて (1-a), (1-b) 式はつぎのように表わされる。

$$dx(t)/dt = Fx(t) + gv(t), \quad \dots\dots (19-a)$$

$$y(t) = hx(t). \quad \dots\dots (19-b)$$

不規則外乱 $v(t)$ は白色雑音とし、ここではつぎの性質を仮定する。

$$E[v(t)] = 0, \quad \text{Cov}(v(t), v(\tau)) = \delta(t-\tau). \quad \dots\dots (20)$$

前節の結果によって、

$$\text{Cov}(x(t), x(t)) = X, \quad \text{Cov}(y(t), y(t)) = hXh' \quad \dots\dots (21)$$

が成立する。ここに X は

$$FX + XF' = -gg' \quad \dots\dots (22)$$

を満足する対称な行列である。

一方、2乗偏差の積分については、

$$x'(0)Yx(0) = \int_0^{\infty} (y(t))^2 dt \quad \dots\dots (23)$$

成立する。ここに Y は方程式

$$F'Y + YF = -h'h \quad \dots\dots (24)$$

を満足する対称行列である。

方程式(22)と(24)に関してつぎの関係が成立している。

定理 4 F が安定であれば

$$hXh' = g'Yg \quad \dots\dots (25)$$

が成立する。もしも対 (F, g) が完全可制御で (F, h) が完全可観測であれば、方程式(22)と(24)は互いに代数的に同値である。すなわち、ある正則な行列 T が存在して、

$$TFT^{-1} = F', \quad Tg = h', \quad TXT' = Y \quad \dots\dots (26)$$

となる。

(証明) まず、 $h(sI-F)^{-1}g = g'(sI-F')^{-1}h'$ であることに注意し、(13)式を用いると

$$\begin{aligned} hXh' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(j\omega I - F)^{-1} gg' (-j\omega I - F')^{-1} h' d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g' (j\omega I - F)^{-1} h' h (-j\omega I - F')^{-1} g d\omega \\ &= g' Y g \end{aligned}$$

が得られる。つぎに(26)式を満足する正則な行列が存在することを示そう。まず、つぎの関係を満足する正則な行列が存在することが知られている⁴⁾。

$$UFU^{-1} = F^*, \quad Ug = g^*.$$

ここに、 F^* , g^* はつぎの形を持つ。

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -f_0 & -f_1 & -f_2 & \dots & -f_{n-1} \end{pmatrix}, \quad g^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (27)$$

また、可制御性と可観測性の双対原理から、つぎの関係を満足する正則な行列 V が存在する。

$$VF'V^{-1}=F^*, \quad Vh'=g^*.$$

そこで $T=V^{-1}U$ と置くと、(26)式の前半の 2 つが成立していることがわかる。つぎに、(22)式の両辺に T, T' を乗じると

$$TFT^{-1}TXT' + TXT'T'^{-1}F'T' = -Tgg'T'$$

となる。(26)式の前半の 2 つの関係式を利用すると

$$F'(TXT') + (TXT)F = -h'h$$

が得られる。(24)式の解は一意的であることから

$$TXT' = Y$$

が得られた。(証明おわり)

5. 平均パワの計算

いままで述べた方法と結果を用いると、与えられたスペクトラム密度関数から平均パワを求める計算公式が容易に得られる。

いま、スペクトラム密度関数 $|\varphi(j\omega)|^2$ がつぎのように与えられているとしよう。

$$\varphi(s) = \frac{h_{n-1}s^{n-1} + \dots + h_0}{s^n + f_{n-1}s^{n-1} + \dots + f_0} \quad \dots\dots (28)$$

$\varphi(s)$ は虚軸上と右半平面において極を持たないものと仮定しておく。

さて、 F^*, g^* を(27)式のごとく定義し、 h^* を

$$h^* = [h_0, h_1, \dots, h_{n-1}]$$

と定義する。そうすると容易に検算できるように

$$\varphi(s) = h^*(sI - F^*)^{-1}g^*$$

となっている。 F^* は安定な行列であるから定理 2, 3 から

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(j\omega)|^2 d\omega = h^* X^* h'^* = g'^* Y^* g^* \quad \dots\dots (29)$$

が得られる。ここに X^*, Y^* は(22), (24)式において F, g, h の代わりに F^*, g^*, h^* と置いたときの解である。行列 Y^* の各要素を y_{ij} と表わすと、 g^* の定義と(29)式から

$$y_{nn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(j\omega)|^2 d\omega \quad \dots\dots (30)$$

が得られる。そこで y_{nn} を求めてみよう。

Y^* は方程式

$$F'^* Y^* + Y^* F^* = -h'^* h^* \quad \dots\dots (31)$$

の解である。(11)式を導いたときと同様な方法で

$$\begin{aligned} g'^* Y^* (sI - F^*)^{-1} g^* + g'^* (-sI - F'^*)^{-1} Y^* g^* \\ = g'^* (-sI - F'^*)^{-1} (sI - F^*)^{-1} g^* \\ = \varphi(-s)\varphi(s) \quad \dots\dots (32) \end{aligned}$$

が得られる。両辺に共通分母を乗じると

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} y_{n,j+1} s^j \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} f_j (-s)^j \right) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} y_{n,j+1} (-s)^j \right)$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^n f_j s^j \right) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} h_j s^j \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} h_j (-s)^j \right) \dots\dots (33)$$

が得られる。ここに $f_n=1$ としている。(33)式の両辺の s^{2j} の係数を比較することによって、

$$2 \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k f_{2j-k} y_{n,k+1} = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k h_{2j-k} h_k \dots\dots (34)$$

が得られる。ここに $j=0, 1, \dots, n-1$ であり、また、

$$f_n=1, \quad f_{n+j}=0 \quad (j \geq 1)$$

とする。(34)式は n 次の連立方程式なので Cramer の公式にしたがって $y_{n,n}$ について解くと、つぎの公式が得られる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(j\omega)|^2 d\omega = y_{nn} = (-1)^{n-1} \frac{\det \Delta(b)}{2 \det \Delta} \quad \dots\dots (35)$$

ここに、 $\Delta, \Delta(b)$ はそれぞれ $n \times n$ の行列でつぎのように表わされる。

$$\Delta = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_n \quad f_{n-1} \end{pmatrix} \quad \dots\dots (36)$$

$$\Delta(b) = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_n \quad b_{n-1} \end{pmatrix} \quad \dots\dots (37)$$

ただし、

$$b_j = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k h_{2j-k} h_k$$

と置いている。

この結果は文献 5), 6) に述べられている結果とむろん一致している。

6. その他の計算公式

制御系 (19-a, b) 式において、入力雑音 $v(t)$ がつぎのようなスペクトラム密度関数を持っている場合を考えよう。

$$\sigma_v(\omega) = \frac{k^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \quad \dots\dots (38)$$

そのとき、 $y(t)$ のスペクトラム密度関数は

$$\sigma_y(\omega) = |h(j\omega I - F)^{-1}g|^2 \frac{k^2}{\omega_0^2 + \omega^2}$$

と表わされる。したがって、出力 $y(t)$ の平均パワは

$$\overline{y(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(j\omega I - F)^{-1}g|^2 \frac{k^2}{\omega_0^2 + \omega^2} d\omega \quad \dots\dots (39)$$

となる。

そこでよく知られているつぎのような積分公式⁷⁾ を

利用しよう。 $U(s)$ は有理関数で分母の次数が分子の次数より大きく、かつ虚軸上と右半面に極を持たないと仮定する。そのとき、任意の正数 λ に対して

$$U(\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\lambda^2 + \omega^2} d\omega \quad \dots\dots (40)$$

が成立する。ここに $V(\omega)$ は $U(j\omega)$ の実部である。すなわち、 $U(j\omega) = V(\omega) + jW(\omega)$ と表わされているものとする ($V(\omega)$, $W(\omega)$ は実関数)。

積分公式(40)を平均パワーの計算式(39)に適用するには、スペクトラム密度関数 $|h(j\omega I - F)^{-1}g|^2$ をある有理関数の実部で表わしたい。ところが、(22)式あるいは(24)式から

$$\begin{aligned} |h(j\omega I - F)^{-1}g|^2 &= 2\operatorname{Re}\{h(j\omega I - F)^{-1}Xh'\} \\ &= 2\operatorname{Re}\{g'Y(j\omega I - F)^{-1}g\} \end{aligned}$$

となることが示される。こうして

$$\overline{y(t)^2} = \frac{k^2}{\omega_0} h(\omega_0 I - F)^{-1} X h' = \frac{k^2}{\omega_0} g' Y(\omega_0 I - F)^{-1} g \quad \dots\dots (41)$$

が得られる。

(41)式において、特に $\omega_0^2 = k^2$ と置いて ω_0 を無限大にすると、(41)式は(25)式になる。

7. 結 言

この論文では、不規則外乱を受けている制御系の解

析、主としてスペクトラム密度関数と平均パワーに関する解析を state-space method に基づいて行なった。同時に、共分散行列の方程式が重要な役割を演じていることを示した。

不規則外乱を受けている系のいわゆる statistical design と称される分野にこの手法が有効になることを期待している。

おわりにあたって、日々ご激励とご指導を賜わっている南雲先生を始めとして、南雲研究室の方々に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Kalman, R.E. and Bucy, R.S.: "New results in linear filtering and prediction theory", ASME J. Basic Eng., **83**, 95/108 (1961)
- 2) 有本卓: "不規則外乱の影響を最小にする最適フィードバック制御", 計測自動制御学会論文集, **2**, 1/7 (1965)
- 3) Bellman, R.: Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill Book (1960)
- 4) Kalman, R.E.: "Mathematical description of linear dynamical systems", SIAM J. Control **1**, 152/192 (1963)
- 5) 伊沢計介: 自動制御入門, オーム文庫, 178 (1954)
- 6) Jury, E.I. and Demey, A.G.: "A general formulation of the total square integrals for continuous systems", IEEE Trans., on Automatic Control, **AC-10**, 119/120 (1965)
- 7) 電気通信学会編: 通信工学ハンドブック, 571 (1959)