UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

DINÁMICA NO LINEAL DE HACES ÓPTICOS
DE AIRY Y DE BESSEL EN MEDIOS KERR CON
ABSORCIÓN NO LINEAL

Carlos Ruiz Jiménez

TESIS DOCTORAL

Septiembre de 2016

Director: Miguel Ángel Porras

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AGRONÓMICA, ALIMENTARIA Y DE BIOSISTEMAS

**DINÁMICA NO LINEAL DE HACES ÓPTICOS
DE AIRY Y DE BESSEL EN MEDIOS KERR CON
ABSORCIÓN NO LINEAL**

Memoria presentada para optar al grado de Doctor por

Carlos Ruiz Jiménez
Licenciado en Ciencias Físicas
Máster en Física de Sistemas Complejos

Director: Miguel Ángel Porras
Doctor en Ciencias Físicas

Septiembre de 2016

A mi madre, que se me quedó en
el camino, y a Ana, luz constante.

Agradecimientos

Paraíso sin tí, ni imagino, ni quiero.

Julio Aumente¹

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mi director y amigo, Miguel Ángel. Su ayuda estos años ha sido constante, y ha hecho todo lo posible por explicarme conceptos y fenómenos que entiendo no son demasiado fáciles de comprender. Le agradezco sinceramente que accediera finalmente al uso del *WhatsApp*, herramienta a la que era, como tantos otros, bastante reacio, y se ha instalado en el transcurso de este trabajo. Cierto es que no sé si yo soy la causa de esa decisión pero está claro que con su uso he ganado en sabiduría a costa de que él perdiera su tiempo. Los errores que pueda cometer en la redacción de esta tesis serán sin duda sólo debidos a mis limitaciones, no a las suyas.

En segundo lugar me gustaría nombrar aquí a Juan Carlos y a Rosa. Con el primero he retomado una amistad que llevaba hibernada demasiado tiempo, y voy a alegrarme siempre de la idea que tuve de ir a consultarle sobre la posibilidad de iniciar una carrera investigadora en el grupo de Sistemas Complejos en el que trabajaba después de tantos años de acabar mi licenciatura. Sus palabras siempre fueron de ánimo. Mi interés y decisión además fueron alentados por Rosa, la primera persona que conocí del grupo, y su *alma máter*. No me faltó demasiado tiempo para darme cuenta de la calidad humana que atesoraba. Ellos me metieron en este lío, y nunca dejaré de agradecerse.

Quiero además hacer extensible el agradecimiento a todos los profesores del Grupo de Sistemas Complejos, de los que aprendí muchos conceptos sobre la complejidad de los sistemas dinámicos. Gracias a ellos logré subir la cuesta y aminorar las carencias debidas a mi desconexión de la Ciencia y de la programación informática. Incluyo de forma particular a Kleber, que vino de Brasil a colaborar con nosotros un año, y con el que tuve la fortuna de publicar uno de los artículos que aquí expondré. Los profesores que tuve en la adolescencia marcaron mi carácter y mis inquietudes, y los de la Universidad perfilaron mi silueta. Me congratulo además de haber podido hacer amistad con una de mis profesoras de Física Fundamental, Isabel, quien me enseñó la asignatura de Física Molecular y de la que mantenía muy buenos recuerdos. Dada mi profesión quiero recordar también a todos los profesores de Enseñanza Secundaria de la Educación Pública, nunca bien ponderados, con los que he tenido y tengo el honor de trabajar.

¹De un poema de su recopilación “La antesala”, en Visor, Madrid 1983.

También recuerdo ahora a los compañeros de carrera, en especial a Jose, a Ramón y a Domingo, con quienes he mantenido tantas charlas de Física a lo largo de estos años. Ellos han contribuido de manera importante a forjar mi curiosidad en los temas científicos, crucial si uno quiere desarrollar un trabajo de investigación.

Y aunque no tengan que ver con el mundo científico propiamente dicho, creo que debo acordarme de todos los amigos que siempre han estado ahí, los del Instituto y los que hice en el mundo de la empresa, en especial a los excompañeros de Infonis, con los que todavía tengo contacto, y los que me acompañaron durante tantas horas dedicadas a “picar” código. Sin duda la experiencia en la empresa privada no fue en vano, y estoy convencido de que conocimientos tan efímeros como los informáticos son sin embargo muy útiles al dejar una base de habilidades y destrezas que nunca se pierde.

Por último, agradecer a mi familia el apoyo que me ha dado, especialmente en la adolescencia, cuando un grave problema de salud me obligó a dejar los estudios. Ellos siempre me animaron a remontar. Mi padre, si todavía estuviera conmigo, estoy seguro de que se habría alegrado mucho de mi decisión, y mi madre, que se me fue el año pasado, estaría orgullosa de verme, si consigo doctorarme después de tantos años. Y Ana, con la que tengo la suerte de compartir mi vida, espero que se pueda sentir contenta por mí y perdone todas las horas que le ha robado este trabajo.

A todos ellos, gracias.

Madrid, 2016.

Abreviaturas

Ecuaciones

- LSE — Ecuación de Schrödinger lineal (*Linear Schrödinger Equation*).
NSE — Ecuación de Schrödinger no lineal (*Nonlinear Schrödinger Equation*).
SVEA — Aproximación de envolvente compleja lentamente variable (*Slowly Varying Envelope Approximation*).

Haces de luz

- NAB — Haz de Airy no lineal (*Nonlinear Airy Beam*).
LNAB — Haz de Airy no lineal límite (*Limiting Nonlinear Airy Beam*).
BB — Haz de Bessel lineal (*Bessel Beam*).
NBB — Haz de Bessel no lineal (*Nonlinear Bessel Beam*).

Fenómenos

- SPM — Automodulación espacial de la fase (*Self-Phase Modulation*).
GVD — Dispersión de la velocidad de grupo (*Group Velocity Dispersion*).
MPA — Absorción multifotón (*Multiphoton Absorption*).

Resumen

A lo largo de esta tesis se estudia la propagación no lineal de haces de luz de tipo Airy y Bessel en medios no lineales en un régimen de altas intensidades en donde no sólo son importantes los efectos debidos a la difracción y a la no linealidad Kerr, que da lugar a la autofocalización, sino que también son importantes los efectos de absorción no lineal del material.

Se trata del estudio de un sistema complejo, no aislado, altamente no lineal y disipativo, que encuentra su aplicación más importante en el fenómeno conocido como *filamentación*, de creciente interés debido a los avances recientes que se han conseguido en este campo utilizando haces de Airy y de Bessel para provocar la ionización del medio, siendo las dos no linealidades estudiadas, efecto Kerr y absorción debida a la ionización multifotón, las que determinan sustancialmente la propagación de los haces y el canal de plasma que generan.

Se ha encontrado que, a estas intensidades, los haces de Airy y de Bessel alcanzan regímenes estacionarios de propagación que actúan como atractores de la dinámica. Estos atractores son, respectivamente, un haz de Airy no lineal y uno de Bessel no lineal. En el caso del haz de Bessel se ha trabajado tanto con el fundamental como con los de orden superior o con vórtice. Estos atractores son los estados estacionarios no lineales de la ecuación de Schrödinger no lineal que rige la propagación. La estacionariedad en la propagación es debida a la cancelación mutua de los efectos de difracción y de autofocalización, y a que la energía que el haz pierde por la absorción no lineal es continuamente repuesta por un flujo constante de energía desde un reservorio intrínseco, dando lugar a la propagación sin atenuación en un medio absorbente no lineal. Estos haces se pueden considerar “solitones” solamente en un sentido amplio, dado que, al contrario que estos, presentan una débil localización en la sección transversal a la dirección de propagación.

El resultado más importante de esta tesis es precisamente la identificación y caracterización del haz no lineal de Airy o de Bessel que actúa como atractor de la dinámica dado el haz de Airy o de Bessel lineal que es introducido en el medio. A partir de un gran número de simulaciones numéricas se ha encontrado una ley de conservación que nos permite predecir el atractor no lineal final al que tenderá un determinado haz lineal inicial. Se ha encontrado que el haz no lineal final tiene exactamente el mismo flujo de energía desde el reservorio hacia el centro del haz que el haz inicial. Como los haces de Airy y de Bessel son ideales (el reservorio tiene una cantidad de energía infinita), se ha verificado que la misma ley de conservación rige para haces de Airy y de Bessel reales (con un reservorio finito de energía) que son generados en experimentos reales con *gra-*

tings cúbicos y axicones, respectivamente. Los haces de Airy y de Bessel reales presentan propagación cuasi-estacionaria solo durante una distancia finita. El haz no lineal de Airy o de Bessel que actúa como atractor en la propagación lineal es también aquel que tiene el mismo flujo de energía desde el reservorio que el haz de Airy o de Bessel lineal que se generaría en condiciones de propagación lineales.

Se ha llevado a cabo un estudio más detallado del caso de haces de Bessel sin vórtice generados por axicones y que se propagan en el medio no lineal. Primero se ha encontrado una fórmula analítica aproximada que determina el NBB que actúa como atractor en la zona Bessel detrás del axicón en función de las propiedades ópticas del medio y de las características del haz de Bessel que generaría el axicón en condiciones de propagación lineales. Segundo, se ha encontrado una explicación de los dos regímenes de propagación no lineal observados experimentalmente detrás del axicón: el régimen estable, caracterizado por la formación de un NBB en la zona de Bessel; y el régimen inestable, caracterizado por grandes fluctuaciones periódicas, cuasi-periódicas o caóticas en la zona de Bessel. Para explicar estos dos regímenes se ha realizado un análisis de estabilidad de los haces de Bessel no lineales bajo pequeñas perturbaciones (análisis linealizado) y se ha verificado que el régimen estable detrás del axicón se corresponde con estabilidad del NBB atractor y el régimen inestable detrás del axicón se corresponde con inestabilidad del NBB atractor. De hecho, la compleja dinámica que se observa en la zona de Bessel refleja el desarrollo de la inestabilidad del haz de Bessel atractor, desde el crecimiento exponencial del modo inestable dominante hasta su desenvolvimiento en grandes oscilaciones periódicas, cuasi-periódicas y caóticas.

Abstract

In this dissertation we study the nonlinear propagation of light beams of the Airy and Bessel type through nonlinear media under a high-intensity regime, in which, not only the effects due to diffraction and Kerr nonlinearity, responsible for self-focusing, are important, but also those having to do with the nonlinear absorption in the material. Thus, we are dealing here with a complex, dissipative, highly-nonlinear non-isolated system.

It has been found that, at such intensities, Airy and Bessel beams reach stationary propagation regimes that act as dynamical attractors. These attractors are nonlinear Airy and Bessel beams identifiable with stationary states of the nonlinear Schrödinger equation that governs their propagation. In the case of the Bessel beam, we have worked both with the fundamental beam and with higher-order or vortex-bearing beams. Stationary propagation is due to the mutual cancellation of diffraction and self-focalization effects, as well as to the fact that the energy loss in the beam on account of nonlinear absorption is continually replenished by a constant flux of energy from an intrinsic reservoir, giving rise to undamped propagation through an absorbing nonlinear medium. These beams can be considered as “solitons” in a wider sense than usual as, differing from those, they display a weak localization in their profile transverse to the direction of propagation.

The most important result of this Thesis is precisely the identification and characterization of the nonlinear Airy or Bessel beam acting as an attractor in the dynamics, given the corresponding Airy or Bessel linear beam used as input in the medium. By means of massive numerical simulations, we have found a conservation law that allows us to predict the final nonlinear attractor given the input linear beam. We have found that such final nonlinear beam has exactly the same energy flux from the reservoir to the center of the beam than the initial beam. As both Airy and Bessel beams are ideal (the reservoir provides an infinite supply of energy), we have been able to verify that the same conservation law holds for either Airy or Bessel real beams (in the presence of a finite energy reservoir), as those produced in real experiments with cubic gratings and axicons, although in that instance they display quasi-stationary propagation only up to a finite distance.

A more detailed study has been conducted in the case of real Bessel beams without a vortex arising from axicons and propagating through a nonlinear medium. First, we have found an approximate analytic formula that determines the nonlinear Bessel beam acting as attractor within the Bessel zone behind the axicon as a function both of the optical properties of the medium and the characteristics of the Bessel beam that the axicon would

create under linear propagation conditions. Second, we have found an explanation for both of the observed nonlinear propagation regimes behind the axicon: the quasi-steady regime, characterized by the formation of a nonlinear Bessel beam within the Bessel zone; and the unsteady regime, characterized by large periodic, quasi-periodic or chaotic fluctuations within the Bessel zone. In order to explain these regimes, we have performed a stability analysis for the nonlinear Bessel beams under small perturbations (linearized analysis) and it has been verified that the steady regime behind the axicon corresponds to the stable character of the nonlinear Bessel attractor beam, while the unstable regime behind the axicon corresponds to instability of the nonlinear Bessel attractor beam. In fact, the complex dynamics that is observed within the Bessel zone reproduces the development of the instability of the Bessel attractor beam, from an exponential increase of the dominant unsteady mode to its evolution towards large periodic, quasi-periodic and chaotic oscillations.

Índice general

Agradecimientos	v
Abreviaturas	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
INTRODUCCIÓN	1
1. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL	7
1.1. Orígenes	8
1.2. Ecuación de ondas	8
1.3. Ecuación de Schrödinger lineal	9
1.3.1. Aproximación paraxial	10
1.3.2. Difracción de haces. Haces gaussianos	11
1.4. Efecto Kerr óptico	14
1.4.1. Índice de refracción no lineal	14
1.4.2. Automodulación espacial de la fase y autofocalización	16
1.5. Absorción multifotón	19
1.6. Conclusión	21
2. PROPAGACIÓN DE HACES DE AIRY EN MEDIOS KERR CON ABSORCIÓN NO LINEAL	23
2.1. Haces de Airy en medios lineales	23
2.2. Haces de Airy no lineales	26
2.2.1. Mecanismo de estacionariedad	28
2.3. Comportamiento asintótico. Haces límite	29
2.4. Componentes de Hänkel	31
2.5. Propagación de haces de Airy ideales en medios no lineales	33
2.6. Problema de selección	34
2.7. Propagación de haces de Airy reales en medios no lineales	38
2.7.1. Introducción abrupta	41
2.7.2. Introducción suave	44
2.8. Efectos de restauración	46
2.9. Conclusión	49

3. PROPAGACIÓN DE HACES DE BESSEL IDEALES CON VÓRTICE EN MEDIOS KERR CON ABSORCIÓN NO LINEAL	51
3.1. El haz de Bessel	51
3.1.1. El haz de Bessel como onda cónica	52
3.1.2. Haces de Bessel con vórtice	54
3.2. Haces de Bessel no lineales estacionarios	55
3.2.1. Mecanismo de estacionariedad	58
3.2.2. Comportamiento asintótico	61
3.3. Propagación de haces de Bessel en medios no lineales	63
3.4. Problema de selección	65
3.5. Conclusión	66
4. PROPAGACIÓN NO LINEAL DE HACES DE BESSEL REALES GENERADOS POR AXICONES	69
4.1. Introducción	69
4.2. Haces de Bessel no lineales en unidades reales	72
4.3. Propagación de haces de Bessel lineales reales en medios no lineales	74
4.3.1. El haz de Bessel no lineal atractor	74
4.3.2. Fórmula analítica aproximada para el haz de Bessel no lineal atractor	78
4.4. Distintos regímenes de propagación según la estabilidad del haz de Bessel no lineal atractor	80
4.5. Conclusión	85
CONCLUSIONES	87
Apéndices	89
A. Cálculo de la solución de Airy de la ecuación de Schrödinger lineal	91
A.1. Haz de Airy ideal	91
A.2. Haz de Airy apodizado	92
B. Cálculo de los perfiles transversales de los haces de Airy no lineales estacionarios	95
B.1. Sistema de ecuaciones	95
B.2. Implementación en MATLAB	95
C. Split Step Fourier Method	99
D. Propagación de haces de Airy no lineales mediante el Split Step Fourier Method	101
D.1. Solución de la parte lineal	101
D.2. Solución analítica de la parte no lineal	102
D.3. Implementación en MATLAB	103
E. Cálculo de los perfiles radiales de los haces de Bessel no lineales estacionarios	107
E.1. Sistema de ecuaciones	107

E.2. Implementación en MATLAB	108
F. Sobre la carga topológica	111
F.1. Definición	111
F.2. Comportamiento de la amplitud en el origen cuando existe un vórtice . . .	112
G. Análisis linealizado de la estabilidad	113
G.1. Ecuación para la perturbación	113
G.2. Problema de autovalores	114
Índice de figuras	118
Índice de materias	119
Referencias	127

INTRODUCCIÓN

La luz habla, va contando la historia con su recorrido, con sus sombras y formas.

Ouka Leele²

El estudio de la radiación electromagnética ha desempeñado un papel fundamental en la Ciencia a partir de finales del siglo XIX. Las ecuaciones de Maxwell, que representan matemáticamente esta radiación, impregnan la mayor parte de los fenómenos que se estudian en Física. El estudio de las ondas electromagnéticas en medios materiales ha sido de un interés fundamental, debido a las múltiples aplicaciones que se han desarrollado para la vida cotidiana, como la radio, la telefonía, la televisión, el fax, la comunicación entre ordenadores (tanto en sus versiones inalámbricas como por cable), etc... Sus aplicaciones en el campo de la salud no han sido menos exitosas, y a diario se realizan análisis diagnósticos con electrogramas, rayos X, resonancias magnéticas y muchas otras técnicas derivadas de la interacción entre la radiación y la materia. Un cambio sustancial se produjo cuando en los años sesenta del pasado siglo se desarrolló la tecnología láser, y con esta la posibilidad de la emisión de luz coherente. Los haces láser coherentes permiten un alto grado de monocromatismo, pueden concentrar muy intensamente la energía en el espacio, y por tanto tienen la capacidad de modificar o transformar materiales. Este hecho se ha aprovechado en Medicina como uso terapéutico en muchos campos, aparte de las aplicaciones en tecnología para grabar, soldar, transmitir información, realizar mediciones, obtener sustancias muy puras, etc... Las altas intensidades que se pueden lograr hoy en día con estos haces son causa también de algunos fenómenos no lineales que serán objeto de nuestro trabajo.

En esta tesis doctoral se estudia la propagación de ciertos haces de luz en medios materiales en un régimen de altas intensidades que da lugar a efectos no lineales. Los haces de luz elegidos para este estudio son los haces de tipo Airy y Bessel, por su creciente interés y por los avances que se han conseguido en las últimas décadas. Los fenómenos involucrados en su propagación son fundamentalmente la difracción lineal, la autofocalización debida al efecto no lineal Kerr y la absorción no lineal del material.

Desde el punto de vista de los sistemas complejos, y más en concreto de los sistemas dinámicos no lineales, el objeto de esta tesis es un sistema dinámico continuo o distri-

²De una entrevista a la fotógrafa madrileña en 2013: <http://www.elnortedecastilla.es/20131110/local/avila/ouka-leele-ahora-artistas-201311101959.html>.

buido en el espacio, concretamente en una o dos dimensiones espaciales, y por tanto con infinitos grados de libertad, cuya dinámica está regida por una ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales, la conocida ecuación de Schrödinger no lineal, con términos dispersivos y términos disipativos, lo que lo hace un sistema no aislado y no hamiltoniano.

Los haces de luz son ondas electromagnéticas monocromáticas que se caracterizan por tener una distribución o perfil de intensidad localizado en la dirección perpendicular a la dirección principal de propagación. En este sentido, responden a los haces típicos que generan los dispositivos láser. Desde los primeros estudios científicos sobre Óptica en el siglo XVII se conoce que el fenómeno de la difracción se presenta siempre que la luz está localizada en la dirección transversal a la dirección de propagación, como ocurre cuando la luz atraviesa una abertura. De igual modo, en un haz de luz, por estar localizado transversalmente, se produce este fenómeno, lo que equivale a decir que los haces se ensanchan transversalmente a medida que se propagan. El ejemplo típico en los haces láser es el conocido haz gaussiano.

Por este motivo, fue una importante sorpresa para la comunidad científica la predicción de la existencia de haces de luz no difractantes de tipo Bessel (Durnin 1987) y de tipo Airy más recientemente (Siviloglou y Christodoulides 2007), así como la observación experimental de ambos (Durnin, Miceli, y Eberly 1987; Siviloglou et al. 2007). El haz de Airy además tiene la singular propiedad de seguir una trayectoria parabólica en su propagación. En realidad, los haces de Airy no difractantes ya fueron predichos por Michael Berry y Nándor Balazs en el campo de la Mecánica Cuántica (Berry y Balazs 1979), debido a la equivalencia matemática entre las ecuaciones que rigen la evolución de los paquetes de onda en ambos campos (Schiff 1968). Aunque existe todavía controversia sobre este asunto, puede decirse que su carácter no difractante es posible debido a su débil localización transversal, que les permite transportar potencia infinita, aunque en los laboratorios se producen a diario versiones reales de los mismos que poseen potencia finita y que son cuasi-no-difractantes. De hecho, se han encontrado numerosas aplicaciones experimentales de estos haces, como pinzas ópticas para atrapamiento de partículas o aclaramiento de partículas (Arlt et al. 2001; Baungartl, Mazilu, y Dholakia 2008). El caso de los haces de Bessel es más rico pues además de existir el haz de Bessel fundamental, existen de orden superior o con vórtice, que transportan momento angular (Allen, Padgett, y Babiker 1999; Volke-Sepulveda et al. 2002). Como se puso de manifiesto a finales de los años 90, la luz no solamente podía transportar momento angular debido al espín del fotón, sino también momento angular orbital debido a su propia trayectoria. Este hecho abrió nuevas aplicaciones en atrapamiento de partículas, como rotores ópticos, en transmisión de información en telecomunicaciones y en diversas formas de transferencia de momento angular de la luz a la materia, ya sea a micro- o nanopartículas, a condensados de Bose-Einstein o a átomos (Masalov 1997; Allen, Padgett, y Babiker 1999; Tabosa y Petrov 1999).

A altas intensidades en medios materiales aparecen fenómenos no lineales, mucho más ricos, o de autointeracción del haz consigo mismo a través de la materia. Se sabe por ejemplo que un haz de luz muy intenso experimenta el fenómeno de la autofocalización o autodesfocalización cuando se propaga en el medio (Askar'yan 1962; Kelley 1965). Este efecto, comprobado experimentalmente en los años 60 (Hercher 1964; Lallemand y Bloem-

berger 1965), es debido al cambio que se produce en el índice de refracción del material proporcional a la intensidad del propio haz, lo que se conoce como efecto Kerr óptico. En el caso de la autofocalización, si la potencia del haz es suficientemente alta, puede ocurrir que este efecto compense la difracción que experimenta el haz, dando lugar a una propagación autoatrapada, sin cambio en el perfil transversal de intensidad, lo que se conoce también como solitón espacial óptico (Trillo y Torruellas 2001). Mientras que los solitones ópticos unidimensionales o temporales $(1+1)D$, es decir, en una dimensión además de la coordenada o variable dinámica, fueron predichos y fácilmente realizados experimentalmente (Agrawal 2001), como muestra su aplicación a las comunicaciones por fibra óptica, los solitones espaciales $(2+1)D$, y multidimensionales en general, son mucho más esquivos. En los sesenta se describieron teóricamente estos “solitones” espaciales en medios no lineales Kerr por varios autores independientemente (Chiao, Garmire, y Townes 1964; Talanov 1964). El primer solitón de orden cero y simetría cilíndrica descrito fue el conocido como “haz de Townes”. Sin embargo, este haz es altamente inestable y no se ha observado nunca experimentalmente, no pudiéndose considerar un verdadero solitón (Porrás et al. 2007). La inestabilidad está relacionada con que en el caso multidimensional, la autofocalización conduce en última instancia al fenómeno del colapso, o formación de una singularidad con intensidad infinita, fenómeno que no existe en $(1+1)D$ (Fibich y Papanicolaou 1999; Moll, Gaeta, y Fibich 2003). De hecho, hasta la fecha, se han observado muy pocos solitones espaciales auténticos, debido a los fenómenos de inestabilidad inducidos por la no linealidad Kerr (Segev et al. 1991). La potencia necesaria para conseguir un haz autoatrapado, conocida como “potencia crítica”, es, por ejemplo, en el vidrio con un haz de Townes en el visible o infrarrojo cercano, de aproximadamente 3 MW, lo que para una anchura típica del haz de unos $50\text{ }\mu\text{m}$, involucra una intensidad pico de 20 GW/cm^2 . En el aire la potencia es de aproximadamente 2 GW y la intensidad correspondiente de 10 TW/cm^2 . Por otro lado, existen también haces de Airy y de Bessel no lineales en medios con no linealidad Kerr (Kaminer, Segev, y Christodoulides 2011; Johannisson et al. 2003) que también pueden propagarse sin cambio, pero al estar débilmente localizados transversalmente, sólo pueden ser considerados solitones en un sentido laxo. Además, estos haces no lineales de tipo Airy y de Bessel en medios con no linealidad de tipo Kerr resultan en general también muy inestables (Kaminer, Segev, y Christodoulides 2011; Porrás et al. 2016).

Otro fenómeno no lineal que aparece a intensidades muy altas en medios no lineales es la absorción no lineal por absorción multifotón (Göppert-Mayer 1931; Kaiser y Garrett 1961). Este fenómeno se produce cuando la energía de un conjunto de fotones iguala la energía necesaria para la excitación electrónica del material (Keldysh 1965). Un caso especialmente importante es cuando los átomos o moléculas son ionizados por el propio haz de luz, llamándose en este caso ionización multifotón. El material absorbe parte de la potencia del haz, dejando de ser transparente. En el caso de que la absorción no lineal origine ionización, se produce el fenómeno de la filamentación (Shen 1984; Braun et al. 1995), o creación de un canal de plasma que acompaña al haz láser y que interacciona con él de un modo complejo (Couairon 2003; Liu et al. 2003). Si la ionización es débil, el plasma no produce una pérdida de transparencia adicional (Tzortzakis et al. 1999; Tzortzakis et al. 2001) que afecte al haz, pero tiene un efecto desfocalizador que se ha usado como explicación del autoatrapamiento del haz en la filamentación. La absorción no lineal en sí

misma produce una saturación en la intensidad máxima que puede alcanzar el haz de luz (Polyakov, Yoshino, y Stegeman 2001), produciendo un decrecimiento de la intensidad en el centro del haz, lo cual tiende a inducir a su vez un flujo de potencia desde la parte exterior hacia el interior del haz (Kudriasov, Gaizauskas, y Sirutkaitis 2005; Gaizauskas et al. 2008). Como se verá en esta tesis, este flujo inducido por la absorción no lineal es de fundamental importancia.

Igual que existen haces de Airy y de Bessel no lineales en medios Kerr, se han descubierto más recientemente haces de Airy y de Bessel no lineales en medios Kerr con absorción no lineal que son también no difractantes y resistentes a la absorción no lineal, en el sentido de que no experimentan ninguna atenuación a pesar de la absorción. En 2004 se demostró que, cuando se tenía en cuenta esta absorción del material, los tradicionales solitones, que presentan una fuerte localización transversal (de tipo exponencial), dejaban de existir, pero no ocurría lo mismo si uno contemplaba haces débilmente localizados de tipo Bessel (Porras et al. 2004). En 2011 se han presentado también haces débilmente localizados de tipo Airy no difractantes resistentes a la absorción no lineal (Lotti et al. 2011). Además, en una de las aportaciones más significativas contenida en esta tesis, hemos descrito haces de Bessel no lineales de orden superior o con vórtice, no difractantes y resistentes a la absorción no lineal (Porras y Ruiz-Jiménez 2014). En recientes investigaciones se ha comprobado que la absorción no lineal no solo no impide la existencia de estos estados de la luz que representan propagación estacionaria, sino que además contribuye a su estabilidad (Porras, Ruiz-Jiménez, y Losada 2015; Porras et al. 2016). Así, en fuerte contraste con los haces de Airy y de Bessel no lineales en medios con pura no linealidad Kerr, los mismos en medios con no linealidad Kerr y absorción no lineal tienden a ser más robustos.

En esta tesis se compendia el trabajo desarrollado para la elaboración de tres artículos publicados recientemente (Porras y Ruiz-Jiménez 2014; Ruiz-Jiménez, Nóbrega, y Porras 2015; Porras, Ruiz-Jiménez, y Losada 2015), en los que se analizan en profundidad las características de la propagación de haces de Airy y de Bessel lineales introducidos en medios Kerr que presentan absorción no lineal. En el capítulo 1 se presenta la ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales que rige la dinámica, la ecuación de Schrödinger no lineal. A partir de las ecuaciones de Maxwell, se deriva la ecuación de Schrödinger no lineal para la propagación de haces de luz en medios con no linealidad Kerr y absorción no lineal, explicando con detalle las aproximaciones involucradas, y se repasan los efectos generales que la difracción, la no linealidad Kerr y la absorción no lineal tienen en la propagación de haces de luz.

El capítulo 2 estudia la propagación de los haces de Airy en medios no lineales. Primero se recuerdan las peculiares características del haz de Airy lineal y las del haz de Airy no lineal en un medio Kerr con absorción no lineal (Lotti et al. 2011). Se demuestra que este haz no lineal se forma espontáneamente cuando se introduce el haz de Airy lineal en el medio. Se encuentra una ley de conservación que permite identificar, por primera vez, cuál de los posibles haces de Airy no lineales se forma en la propagación no lineal a partir de los parámetros del haz de Airy lineal introducido, es decir, el que actúa como atractor de la dinámica. Se ha comprobado también la validez de esta ley para el caso de

haces de Airy reales o apodizados. Se demuestra que el haz de Airy no lineal identificado como el atractor de la dinámica de un haz de Airy ideal, de potencia infinita, también sigue actuando como atractor en el caso de los haces reales, de potencia finita, que pueden producirse en un laboratorio, si bien en este último caso la formación casi completa o no del atractor depende de la disposición experimental utilizada. Esta predicción es una de las aportaciones originales más destacadas de esta tesis, y es de gran importancia para el avance teórico y experimental del estudio de la propagación de estos haces no lineales y sus aplicaciones.

El capítulo 3 y el capítulo 4 están dedicados a la propagación en medios no lineales de los haces de Bessel lineales de orden cero y de orden superior o con vórtice. Primero, en el capítulo 3 se recuerdan los haces de Bessel lineales de cualquier orden. Se presentan, por primera vez, los haces de Bessel no lineales con vórtice en medios Kerr con absorción no lineal. Se demuestra que este haz no lineal es atractor de la dinámica que se produce cuando se introduce el haz de Bessel lineal en el medio. Se encuentra una ley de conservación, análoga a la encontrada en el caso de los haces de tipo Airy, que identifica el haz de Bessel no lineal que se forma a partir del haz de Bessel lineal introducido.

En el capítulo 4 se estudia la situación real de haces de Bessel generados con un axicón (lente cónica). Dada la mayor complejidad en comparación con los haces de Airy, se limita la discusión al haz de Bessel fundamental (sin vórtice). En estudios previos se ha observado experimentalmente que existen dos regímenes no lineales de propagación después del axicón. En el primero de estos regímenes se forma un haz de Bessel no lineal, mientras que en el segundo aparentemente no se forma nada y aparecen grandes fluctuaciones periódicas, cuasi-periódicas, o incluso aparentemente caóticas, de la intensidad. Sin embargo, hemos verificado que en ambos casos sigue rigiendo la ley de conservación descubierta en el capítulo 3 y que especifica un haz de Bessel no lineal ideal atractor. Se ha realizado un análisis linealizado de estabilidad (bajo pequeñas perturbaciones) de los haces de Bessel no lineales ideales y se ha concluido que algunos son estables y otros inestables. Se ha comprobado que el primer régimen experimental ocurre precisamente cuando el haz de Bessel no lineal atractor es estable y que el segundo régimen se da cuando este atractor es inestable. De hecho, la dinámica periódica, cuasi-periódica o caótica detrás del axicón reproduce el desarrollo de la inestabilidad del haz de Bessel no lineal atractor.

Un conjunto de siete apéndices cierran este escrito. En el apéndice A se muestra la deducción de la solución de la ecuación de Schrödinger lineal en forma de un paquete de Airy, que a menudo no es explicada en la literatura. En los apéndices B, C, D y E se explican los métodos numéricos utilizados para el cálculo de los estados estacionarios de la ecuación de Schrödinger no lineal en el caso de los haces de Airy y de Bessel y la propagación no lineal en el caso del haz de Airy. En el apéndice F se da la definición teórica de la carga topológica, relacionada con el vórtice de los haces, y se estudia el comportamiento de la amplitud en tono al vórtice. Por último, en el apéndice G se explica el método teórico empleado para el análisis numérico de la estabilidad bajo pequeñas perturbaciones (análisis linealizado).

ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL

En este capítulo se estudian los fenómenos involucrados en la propagación de un haz de luz láser monocromático o cuasi-monocromático que son relevantes a las intensidades de interés, que van desde los MW/cm^2 hasta los TW/cm^2 . Estos fenómenos son fundamentalmente la difracción, la automodulación de la fase en el medio no lineal Kerr, que da lugar a la autofocalización, y la absorción no lineal debida a la absorción multifotón. Por supuesto existen otros efectos lineales y no lineales que pueden afectar a la propagación del haz, como la absorción lineal o la dispersión cromática debida a que tales intensidades solo pueden conseguirse con pulsos. También, si la absorción da lugar a la ionización del medio, el plasma generado afecta a la propagación. Los trabajos recientes muestran que en la filamentación con haces de Airy o de Bessel son la difracción, la no linealidad Kerr y la absorción multifotón las que determinan sustancialmente la propagación, pudiéndose suponer una forma invariable del pulso, siempre que las distancias de propagación sean más cortas que la longitud de dispersión debido a la dispersión cromática (Couairon et al. 2013; Jukna et al. 2014)¹.

Por ello se deriva la ecuación fundamental que rige la propagación, la ecuación de Schrödinger no lineal, a partir de las ecuaciones de Maxwell suponiendo que los efectos temporales no son relevantes. Independientemente de su aplicación a haces láser, la ecuación de Schrödinger no lineal en sus diversas variantes es de gran interés en la Matemática aplicada y la Dinámica no lineal de sistemas continuos (Sulem y Sulem 1999; Ablowitz, Prinari, y Trubatch 2004). El presente modelo encuentra también aplicación en otras áreas de la Física, como los condensados de Bose-Einstein, donde, en la aproximación de campo medio, la función de onda del condensado está regida por la ecuación de Schrödinger no lineal con un término cúbico y la absorción no lineal representa la pérdida de átomos del condensado por colisiones inelásticas (Alexandrescu y Pérez-García 2006).

¹Esto no es en general cierto en la filamentación inducida tras la autofocalización de los habituales haces de tipo gaussiano, donde la dinámica temporal y espectral (generación de supercontinuo espectral) es muy compleja. Con haces de Bessel y Airy, se ha demostrado que la llamada introducción “suave”, que veremos más adelante, inhibe esta dinámica temporal, incluyendo la generación del continuo (Polesana et al. 2007).

1.1. Orígenes

La ecuación de Schrödinger no lineal (*Nonlinear Schrödinger equation*, NSE), en sus muchas variantes, es la base de la teoría de la autofocalización de haces de luz, y fue introducida por Talanov (Litvak y Talanov 1967) usando la aproximación paraxial, ya desarrollada por Leontovich y Fock (Leontovich y Fock 1946) en el contexto de la evolución de las ondas de radio en la ionosfera, dando lugar a una ecuación parabólica no lineal en derivadas parciales. Usualmente aparece como el resultado de la reducción de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales cuando se suponen ondas casi monocromáticas, planas o casi planas, en donde se pueden aplicar aproximaciones debidas a la evolución lenta del paquete respecto de las oscilaciones dentro de él, tanto en espacio como en el tiempo. De esta forma la NSE es una ecuación para la envolvente compleja de los paquetes de onda.

El nombre de NSE, acordado más adelante, vino de la analogía con la ecuación de Schrödinger en Mecánica Cuántica, pero lo que allí eran ondas de probabilidad aquí son envolventes de los paquetes de onda del campo electromagnético. El operador diferencial lineal de segundo orden que contiene representa la difracción de la onda y los términos no lineales pueden ser debidos a alteraciones del medio por la propia onda y a términos no lineales disipativos, además de posibles términos de interacción con otras ondas. La variable “temporal” que define la evolución en Mecánica Cuántica aquí se referirá a la coordenada en la dirección de propagación del haz y el laplaciano es tomado en las direcciones transversales.

1.2. Ecuación de ondas

Partimos de las ecuaciones de Maxwell en un medio dieléctrico homogéneo sin cargas ni corrientes libres,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.1)$$

en donde, aparte del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y la inducción magnética $\mathbf{B}$, se definen sus generalizaciones en medios materiales por medio del vector desplazamiento $\mathbf{D}$ y el campo magnético $\mathbf{H}$ como (Wangness 1989)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío, μ_0 es la permeabilidad en el vacío, y $\mathbf{P}$ y $\mathbf{M}$ son las polarizaciones inducidas eléctrica y magnética. Como vamos a considerar materiales dieléctricos no magnéticos, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, y la última de las ecuaciones (1.1) queda

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

con lo que usando la conocida identidad operacional $\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$ (Spiegel 1970), y tomando el rotacional de la tercera de las ecuaciones (1.1) y la ecuación (1.3) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

en donde la cancelación se produce al aplicar la primera de las ecuaciones (1.1), entendiendo que el campo eléctrico y el desplazamiento son paralelos, lo cual es exactamente cierto en medios lineales y no lineales isótropos (Boyd 2008), como los medios considerados en este trabajo. Con esto resulta

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

lo que constituye la ecuación de ondas para el campo eléctrico con una fuente debida a la polarización del medio.

1.3. Ecuación de Schrödinger lineal

Cuando trabajamos con intensidades de campo bajas la polarización de los materiales suele responder de forma lineal, es decir, estrictamente proporcional al campo aplicado. Se puede suponer por tanto que en un instante dado t la polarización lineal depende linealmente del campo en ese instante y en instantes anteriores, es decir (Cabrera, López, y Agulló 1992)

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau, \quad (1.5)$$

en donde $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad lineal del medio, cantidad en general tensorial salvo para medios isótropos, que son los que nos ocupan. El límite inferior de la integral en realidad es $\tau = 0$, dado que por causalidad para $\tau < 0$ la susceptibilidad no contribuye, $\chi^{(1)} = 0$.

A partir de ahora vamos a prescindir del carácter vectorial de los campos, dado que supondremos luz linealmente polarizada y, como se verá a continuación, ondas cuasi-planas o paraxiales². De este modo nuestra teoría se puede convertir en una teoría escalar. En los efectos de propagación que nos interesan, puede suponerse que las ondas son monocromáticas, de frecuencia angular ω_0 , para las que se suele emplear la notación compleja usual, de forma que el campo eléctrico será la parte real del campo complejo $\mathcal{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t)$,

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t}\} = \frac{1}{2} [\mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_0 t}], \quad (1.6)$$

²Los efectos de la polarización en la dinámica no lineal de haces de luz son objeto de muy recientes investigaciones (Rostami 2016).

y lo mismo para la polarización,

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{P}_L(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t}\} = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_L(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{P}_L^*(\mathbf{r})e^{i\omega_0 t}]. \quad (1.7)$$

Definiendo la susceptibilidad lineal también como una cantidad compleja por medio de la transformada de Fourier,

$$\chi_{\omega_0}^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau, \quad (1.8)$$

y sustituyendo las anteriores expresiones en (1.5) e identificando términos se obtiene la conocida relación

$$\mathcal{P}_L(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_{\omega_0}^{(1)} \mathcal{E}(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

Usando este hecho, la ecuación de ondas para el campo real (1.4) se cumplirá siempre que la amplitud compleja cumpla la relación

$$\Delta \mathcal{E} + \frac{\omega_0^2}{c^2} (1 + \chi_{\omega_0}^{(1)}) \mathcal{E} = 0, \quad (1.10)$$

en donde se ha usado la conocida relación $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$. Se define además la constante dieléctrica (en realidad dependiente de la frecuencia) como (Agrawal 2001)

$$\epsilon_r(\omega) \equiv (1 + \chi_{\omega}^{(1)}) \equiv \left[n(\omega) + i \frac{\alpha(\omega)c}{2\omega} \right]^2, \quad (1.11)$$

donde $n(\omega) \simeq 1 + (1/2) \text{Re}\{\chi_{\omega}\}$ es el índice de refracción y $\alpha = \omega/nc \text{Im}\{\chi\}$ es el coeficiente de absorción lineal, que supondremos despreciable al considerar materiales transparentes. De esta manera el índice de refracción será simplemente $n(\omega) \simeq \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$. Con la notación $n_0 = n(\omega_0)$ la ecuación (1.10) queda

$$\Delta \mathcal{E} + \frac{\omega_0^2 n_0^2}{c^2} \mathcal{E} = 0, \quad (1.12)$$

o, utilizando la constante de propagación $k_0 = \omega_0 n_0 / c$,

$$\Delta \mathcal{E} + k_0^2 \mathcal{E} = 0, \quad (1.13)$$

que constituye la llamada ecuación de Helmholtz o ecuación para ondas monocromáticas.

1.3.1. Aproximación paraxial

Aparte de luz monocromática y linealmente polarizada, en este estudio consideraremos ondas cuasi-planas, como las que puede generar un dispositivo o fuente láser, propagándose fundamentalmente según la dirección z . Así es conveniente escribir

$$\mathcal{E} = A(x, y, z) e^{ik_0 z}, \quad (1.14)$$

en donde $A(x, y, z)$ es la llamada envolvente compleja, que varía lentamente en x, y , y especialmente en z , en comparación con las variaciones de la onda debidas a $\exp(ik_0 z)$.

Esto constituye la aproximación de envolvente compleja lentamente variable (*slowly varying envelope approximation*, SVEA) y que usaremos al sustituir (1.14) en (1.13), lo que conduce a

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial z} + 2ik_0 A \right) - \cancel{k_0^2 A} + \cancel{k_0^2 A} = 0. \quad (1.15)$$

Se desprecia el primer término del paréntesis frente al segundo puesto que la variación lenta de A frente a $\exp(ik_0 z)$ implica

$$\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \ll |k_0 A|, \quad (1.16)$$

con lo que llegamos a la llamada ecuación de Schrödinger lineal (*Linear Schrödinger equation*, LSE),

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} A, \quad (1.17)$$

en donde se ha introducido el llamado laplaciano transversal, definido como $\Delta_{\perp} \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ en las dos coordenadas transversales. La SVEA aplicada a luz monocromática es equivalente a la aproximación paraxial, de ángulos pequeños o de Fresnel. La LSE describe la difracción de un haz de luz en esta aproximación, como se verá a continuación. Como se dijo en la introducción, en esta tesis se estudian haces de luz que por sus características muy particulares no experimentan el fenómeno de la difracción. En el capítulo 2 se estudiarán los haces de Airy, que son uniformes en y , con lo que $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2$, y en el capítulo 3, los haces de Bessel con simetría de revolución en torno al eje z , con lo que $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)(\partial/\partial r) + (1/r^2)(\partial^2/\partial \phi^2)$ en coordenadas cilíndricas. Veremos que estos dos tipos de haces son soluciones estacionarias de la ecuación lineal (1.17). Nótese que el papel que juega el tiempo, t , en la ecuación original de Schrödinger de la Mecánica Cuántica, aquí lo juega la coordenada de propagación, z .

1.3.2. Difracción de haces. Haces gaussianos

Como se ha visto, la LSE ha sido deducida mediante lo que en Óptica se conoce como aproximación paraxial o de ángulos pequeños. En este sentido, se puede demostrar que no es más que una versión diferencial de la aproximación integral de Fresnel para la difracción, deducida a partir del principio de Huygens (Born y Wolf 1980).

Según la teoría escalar de Kirchhoff, se obtiene el valor de la perturbación luminosa $\mathcal{E}(x, y, z)$ a una distancia z en el plano (x, y) de una onda monocromática que pasa por una abertura de superficie S en el plano (x', y') que se encuentra en $z = 0$ por medio de la integral

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda_0} \int_S \mathcal{E}(x', y', 0) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \cos \theta dx' dy', \quad (1.18)$$

donde θ es el ángulo que forma el radio vector de un punto (x', y') sobre la abertura con un punto (x, y) en el plano z , y $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$. Usando la aproximación

paraxial de Fresnel, también llamada de campo cercano porque $x, y \ll z$, podemos suponer que $\cos \theta \sim 1$ y que $r \sim z$ en el denominador y en la fase hacer la aproximación

$$r \simeq z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - y')^2}{z^2} \right), \quad (1.19)$$

y teniendo en cuenta que $\mathcal{E} = A \exp(ik_0 z)$, se obtiene

$$A(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda_0 z} \int_S A(x', y', 0) e^{i \frac{k_0 [(x-x')^2 + (y-y')^2]}{2z}} dx' dy', \quad (1.20)$$

conocida como integral de difracción de Fresnel, que es la solución en forma integral de la LSE (1.17) para una condición inicial $A(x, y, 0)$, como puede verse por sustitución directa. La expresión

$$\frac{1}{z} e^{i \frac{k_0 (x^2 + y^2)}{2z}}, \quad (1.21)$$

es la envolvente compleja en aproximación paraxial de una onda esférica emitida en el origen. La integral de Fresnel dice que $A(x, y, z)$ es una superposición de ondas esféricas paraxiales con amplitudes $A(x', y', 0)$ emitidas desde los distintos puntos (x', y') de la fuente.

Haces gaussianos

El prototipo de haz láser que muestra los efectos de difracción de un modo especialmente sencillo es el haz gaussiano. Si la amplitud compleja en $z = 0$ es la distribución gaussiana $A(x, y, 0) = \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2] = \exp(-r^2/w_0^2)$, en donde a partir de ahora r será la coordenada radial en cilíndricas, $r \equiv x^2 + y^2$, y w_0 es la anchura de la distribución gaussiana, también llamada anchura de la “cintura”, la solución de la LSE, o la integral de Fresnel, a una distancia z cualquiera es

$$A(x, y, z) = \frac{-iL_R}{q(z)} e^{i \frac{k_0 r^2}{2q(z)}} \quad \text{con} \quad q(z) = z - iL_R, \quad (1.22)$$

siendo L_R la distancia de difracción o de Rayleigh, definida como

$$L_R = \frac{k_0 w_0^2}{2}. \quad (1.23)$$

Por ejemplo, para $w_0 = 1$ mm en el aire ($n_0 \simeq 1$), con luz a 800 nm, la longitud característica de difracción sería $L_R \simeq 3.93$ m, que será la distancia a la cual la anchura del haz pase de w_0 a $\sqrt{2} w_0$.

Es conveniente hacer

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{R(z)} + \frac{2i}{k_0 w(z)^2} \Rightarrow \begin{cases} R(z) = z \left[1 + \left(\frac{L_R}{z} \right)^2 \right] \\ w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/L_R)^2} \end{cases}, \quad (1.24)$$

en donde $w(z)$ y $R(z)$ son la anchura del haz y el radio de curvatura de los frentes de onda en función de z . De este modo el haz gaussiano puede escribirse más explícitamente como

$$A(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (z/L_R)^2}} e^{-i\phi} e^{i \frac{k_0 r^2}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} \quad \text{con} \quad \phi = \arctg(z/L_R), \quad (1.25)$$

Figura 1.1: Difracción. Esquema de la difracción de un haz gaussiano. En rojo perfiles radiales de intensidad. En verde se representa la evolución de los frentes de onda que divergen en la difracción. A izquierda y derecha una simulación de la difracción de un haz gaussiano después de dos distancias de Rayleigh.

o bien

$$A(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{-i \arctan(z/L_R)} e^{i \frac{k_0 r^2}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}. \quad (1.26)$$

Puede verse que la distribución transversal de amplitud es siempre gaussiana pero con una anchura $w(z)$ que aumenta con la distancia, y como $R(z) > 0$, la fase inicialmente nula pasa a adquirir una distribución parabólica positiva que representa en la aproximación paraxial un frente de onda esférico divergente. En la figura 1.1 se aprecia un esquema de la difracción de un haz gaussiano. Los frentes de onda divergentes aparecen en verde y el perfil de intensidad, en rojo, se ensancha a medida que aumenta la distancia de propagación. De (1.24) se ve que si $z \rightarrow \infty$, entonces $w(z) \rightarrow w_0 z / L_R \equiv \theta z$, con $\theta = 2/k_0 w_0$, el llamado ángulo de divergencia, resultando que a grandes distancias la anchura aumenta linealmente con la distancia y proporcionalmente a la divergencia.

De la misma forma, cuando en lugar de la función prueba (1.22) probamos con algo más complicado que rompa la simetría de revolución en el plano (x, y) obtenemos los llamados haces de Gauss de orden superior o modos de Hermite-Gauss, y si lo hacemos en cilíndricas obtenemos los modos de Laguerre-Gauss.

El haz gaussiano ilustra el fenómeno de la difracción en haces láser típicos y afecta a toda onda localizada transversalmente de modo que transporta potencia finita. Como se ha dicho, en esta tesis se estudian precisamente las excepciones a esta regla, los haces de Airy y los de Bessel, que en contra de lo habitual son libres de difracción o no difractantes, lo que es debido, como veremos, a que idealmente transportarían, al contrario que los de Gauss, una cantidad de potencia infinita.

1.4. Efecto Kerr óptico

1.4.1. Índice de refracción no lineal

Se sabe que a intensidades muy altas del campo la expresión (1.5) ya no es válida, es decir, la polarización no es estrictamente proporcional al campo aplicado sino que hay que incluir una respuesta no lineal del material,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t), \quad (1.27)$$

en donde la parte no lineal incluye en principio el cuadrado del campo, el cubo, etc; expresando al fin y al cabo todas las posibles interacciones del campo consigo mismo a cualquier orden. Dado el hecho de que la mayoría de los líquidos, gases o cristales amorfos no producen no linealidades ópticas de orden par (debido a su isotropía tienen simetría de inversión³), y que el término de tercer orden ya es lo suficientemente pequeño para no tener en cuenta más⁴, podemos admitir la expresión⁵

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) E(\mathbf{r}, t - \tau_1) E(\mathbf{r}, t - \tau_2) E(\mathbf{r}, t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (1.28)$$

en donde $\chi^{(3)}$ es la susceptibilidad no lineal de tercer orden del material. En los medios considerados, la dispersión en la polarización no lineal suele ser muy pequeña, y en todo caso, irrelevante para luz cuasi-monocromática, de modo que puede suponerse que el material responde instantáneamente:

$$\chi^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \chi^{(3)} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3), \quad (1.29)$$

y, por tanto,

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3(\mathbf{r}, t). \quad (1.30)$$

Usando la notación compleja, el cubo del campo arroja la expresión

$$E^3 = \frac{1}{8} [\mathcal{E}^3 e^{-3i\omega_0 t} + cc + 3|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} e^{-i\omega_0 t} + cc], \quad (1.31)$$

en donde cc denota conjugación compleja. Los primeros dos sumandos aportarían a la polarización no lineal términos de frecuencia $3\omega_0$, lo que daría lugar a la generación del tercer armónico, que necesita condiciones especiales de ajuste de fase para ser efectiva, y en todo caso no influye apreciablemente a la dinámica de propagación no lineal (Kolesik et al. 2002). Por tanto el cubo del campo quedaría

$$E^3 = \frac{3}{8} [|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} e^{-i\omega_0 t} + cc]. \quad (1.32)$$

³No obstante en algunos casos puede también ocurrir que los efectos no lineales rompan esta simetría y se generen no linealidades de orden par (Moll et al. 2002)

⁴Si para materia sólida la $\chi^{(1)}$ es del orden de la unidad, la $\chi^{(3)}$ es del orden de 10^{-22} (por ejemplo, $\chi^{(3)} = 2, 24 \cdot 10^{-22} m^2/V^2$ para sílice fundida (Boyd 2008)).

⁵De nuevo en materiales no isótropos $\chi^{(3)}$ tendría un carácter tensorial.

Como, por otra parte, para la polarización no lineal usamos también la notación compleja,

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{P}_{NL}(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t}\} = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{NL}(\mathbf{r})e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{P}_{NL}^*(\mathbf{r})e^{i\omega_0 t}], \quad (1.33)$$

con ayuda de (1.30) e identificando términos obtenemos la expresión

$$\mathcal{P}_{NL} = \frac{3}{4}\epsilon_0\chi^{(3)}|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}. \quad (1.34)$$

De esta forma, la ecuación de Helmholtz no lineal análoga a (1.13) será

$$\Delta\mathcal{E} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \left(n_0^2 + \frac{3}{4}\chi^{(3)}|\mathcal{E}|^2 \right) \mathcal{E} = 0, \quad (1.35)$$

y teniendo en cuenta que la intensidad, que será la magnitud experimental más notoria (medida normalmente en W/cm²), es proporcional al cuadrado del módulo del campo, $I = n_0\epsilon_0 c |E|^2/2$ y definiendo el índice de refracción no lineal, n_2 , como

$$n_2 \equiv \frac{3}{4n_0^2\epsilon_0 c} \chi^{(3)}, \quad (1.36)$$

se tiene que

$$\Delta\mathcal{E} + \frac{\omega_0^2}{c^2} (n_0^2 + 2n_0n_2I) \mathcal{E} = 0, \quad (1.37)$$

lo cual sugiere que la no linealidad ha modificado el índice de refracción neto del material, n_T , de forma que ahora

$$n_T^2 = n_0^2 + 2n_0n_2I \Rightarrow n_T \simeq n_0 + n_2I. \quad (1.38)$$

La cantidad n_2 en esta ocasión tendrá las dimensiones de cm²/W y cumplirá siempre que $n_2I \ll n_0$, incluso para grandes intensidades (TW/cm²) como las que manejaremos aquí (n_2 es del orden de 10⁻¹⁶cm²/W en los materiales que nos ocupan, $n_2I \sim 10^{-4} \ll n_0 \sim 1$). A la variación del índice de refracción proporcionalmente a la intensidad se le conoce como efecto Kerr óptico. En este caso veremos que dará lugar a una no linealidad cúbica, aunque en algunos casos se admiten más términos en el desarrollo del índice de refracción, $n_T \simeq n_0 + n_2I + n_4I^2$, pudiendo aparecer no linealidades quínticas en la ecuación.

Repitiendo todo el cálculo para la onda (1.14), y aplicando la aproximación paraxial (1.16) nos quedará la ecuación, en el Sistema Internacional,

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} A + i \frac{k_0\epsilon_0 c}{2} n_2 |A|^2 A, \quad (1.39)$$

que constituye la NSE para la amplitud compleja lentamente variable⁶.

Hay que hacer notar sin embargo que el “campo eléctrico” que usaremos en este trabajo no será el definido por unidades del Sistema Internacional, sino en realidad proporcional

⁶ *Stricto sensu*, la ecuación debería tener además un término temporal debido a la dispersión cromática que aquí despreciaremos.

a este por un factor $\sqrt{n_0\epsilon_0 c/2}$, medido en $\text{W}^{1/2}/\text{cm}$ para que su cuadrado nos de directamente la intensidad (irradiancia o flujo medio del vector de Poynting, medido en W/cm^2 , $I = n_0\epsilon_0 c |E|^2/2$ (Griffiths 2008)). Por tanto la ecuación anterior para la envolvente compleja en $\text{W}^{1/2}/\text{cm}$ queda

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0}\Delta_{\perp}A + i\frac{k_0}{n_0}n_2|A|^2A, \quad (1.40)$$

que será la forma usada en este trabajo.

1.4.2. Automodulación espacial de la fase y autofocalización

La no linealidad debida al efecto Kerr tiene la propiedad de focalizar ($n_2 > 0$) o desfocalizar ($n_2 < 0$) la onda en su evolución a través del medio, y está unida al fenómeno de automodulación de la fase (*self-phase modulation*, SPM), que de nuevo dependerá de la intensidad de la onda inicial y solo se observará a grandes intensidades. Esto supone un estrechamiento o ensanchamiento del perfil de intensidad en el plano transversal al eje de propagación de la onda. En el caso de una onda de perfil gaussiano podemos ver un ejemplo numérico del efecto de autofocalización (*self-focusing*) o autodesfocalización (*self-defocusing*) en la figura 1.2.

Limitándonos al caso más frecuente de medios con $n_2 > 0$, el fenómeno de la automodulación espacial de la fase y la autofocalización que conlleva puede entenderse como sigue. A distancias donde la difracción no es todavía importante, $z \ll L_R$, la NSE (1.40) se reduce a

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\frac{k_0}{n_0}n_2|A|^2A. \quad (1.41)$$

Para un haz en $z = 0$ con frente de onda plano $A(r, 0) = a(r, 0)$, donde $a(r, 0) > 0$ es real, y perfil de intensidad $I(r) = a^2(r, 0)$, la solución se puede hallar analíticamente, obteniendo

$$A(r, z) = a(r, 0)e^{i\frac{k_0}{n_0}n_2I(r)z}. \quad (1.42)$$

De este modo se ve que el haz en su propagación adquiere una modulación en la fase proporcional al perfil de intensidad $I(r)$. Para un haz de luz que usualmente tiene un máximo en $r = 0$, como el haz gaussiano estudiado anteriormente, la modulación en la fase en torno a $r = 0$ es una modulación cuadrática negativa, que representa un frente de onda convergente, al contrario de lo que ocurriría en el caso de la difracción, en donde los frentes divergían. En la figura 1.3 se aprecia un esquema de este fenómeno, con los perfiles de intensidad en rojo y la evolución de los frentes de onda en verde. A la larga, los rayos luminosos, inicialmente paralelos, convergen para mantenerse perpendiculares a los frentes de onda, lo que provoca la autofocalización o estrechamiento del haz.

De acuerdo con la ecuación (1.42), la distancia a la cual estos fenómenos no lineales de focalización o Kerr empiezan a ser importantes se puede estimar por

$$L_{\text{SPM}} \equiv \frac{n_0}{2k_0n_2I_0}, \quad (1.43)$$

en donde I_0 es la intensidad pico del haz. Esta cantidad suele ser pequeña para las intensidades que manejamos, indicando que el efecto Kerr es importante incluso en los primeros

Figura 1.2: (a) Perfiles transversales en donde se aprecia el fenómeno de la autofocalización (self-focusing, $n_2 > 0$) desde la onda inicial a la propagada y abajo estrechamiento de la anchura con la distancia, de una onda gaussiana unidimensional $A(x) = \exp(-x^2/w^2)$ con anchura inicial de $w_0 = 1$ mm a lo largo de una distancia de $L = 25$ dm ($\lambda = 633$ nm, $n_0 = 1.5$; $n_2 = 2 \times 10^{-13}$). (b) Lo mismo para el caso de la autodesfocalización (self-defocusing, $n_2 = -2 \times 10^{-13}$).

momentos de la evolución. Si como se ha comentado $n_2 I_0 \sim 10^{-4}$, para luz visible o en el infrarrojo cercano ($k_0 \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$) esta distancia es tan solo de una fracción de centímetro.

Se ha visto además que el efecto de la difracción de la luz tiende a ensanchar los paquetes de onda a lo largo de su evolución espacial. El hecho de que en algunas condiciones el efecto de la difracción y el de la autofocalización se pueda compensar, puede dar lugar a los llamados solitones espaciales, haces que permanecen inalterados en su perfil transversal de intensidad en la propagación, de los cuales el más famoso es el haz de Townes (Chiao, Garmire, y Townes 1964). El perfil transversal de intensidad de este haz es tal que se produce un balance preciso entre los efectos de difracción y autofocalización.

Por tanto, la difracción y la SPM espacial tienen efectos contrarios, crean frentes de onda divergentes o convergentes. En términos generales, las condiciones bajo las cuales ambos efectos podrían cancelarse mutuamente se pueden estimar poniendo $L_R = L_{\text{SPM}}$, lo que conduce a un valor característico de la intensidad a la cual podría tener lugar la formación de un solitón espacial dada por

$$I_S = \frac{n_0}{k_0^2 w_0^2 n_2}. \quad (1.44)$$

Esta expresión conduce a un sencillo criterio aproximado para la formación de un solitón espacial. Suponiendo un perfil aproximadamente gaussiano $I_S \exp(-2r^2/w_0^2)$, la potencia que transporta sería $2\pi \int_0^\infty dr r I(r) = \pi I_S w_0^2 / 2$ y sustituyendo la expresión (1.44), tendríamos que la potencia necesaria, llamada potencia crítica, sería $P_{\text{CRIT}} = \pi n_0 / 2 k_0^2 n_2$ (para el vidrio por ejemplo es del orden de 10 MW). Esto sin embargo es una estimación,

Figura 1.3: Automodulación de la fase y autofocalización. Esquema de la autofocalización de un haz gaussiano. En rojo perfiles radiales de intensidad antes y después. En verde se representa la evolución de los perfiles radiales de los frentes de onda que convergen debido a la automodulación de la fase. A izquierda y derecha una simulación real de la autofocalización de un haz gaussiano.

y en la práctica las potencias críticas suelen ser mayores, y suelen expresarse como

$$P_{\text{CRIT}} = \alpha \frac{\pi n_0}{2k_0^2 n_2}, \quad (1.45)$$

en donde, por ejemplo, para un haz gaussiano $\alpha = 3.77$ (Marburger 1975) o para el comentado haz de Townes (Chiao, Garmire, y Townes 1964) este valor es de $\alpha = 3.72$. Para haces de luz que transporten esta potencia crítica los efectos difractivos y autofocalizantes se compensan (Silberberg 1990a), dando lugar al solitón espacial o haz auto-atrapado (*self-trapping*) (Bjorkholm y Ashkin 1979). Para $P < P_{\text{CRIT}}$ el equilibrio se rompe y el haz se difracta para siempre. Para $P > P_{\text{CRIT}}$ el haz se autofocaliza, desarrollando una singularidad a cierta distancia, lo que se conoce como colapso del haz (Sulem y Sulem 1999). Sin embargo esta singularidad es un artefacto del modelo de la ecuación de Schrödinger no lineal cúbica⁷. Antes de la formación de la singularidad, la intensidad es tan alta que otros efectos lineales o no lineales entran en juego, deteniendo el colapso. Estos mecanismos son diferentes dependiendo de las condiciones experimentales, y pueden ser la dispersión cromática, la absorción no lineal o la ionización del medio. Después de la eliminación del colapso, y dependiendo del mecanismo específico que lo impide, puede formarse un haz de luz auto-atrapado o solitón espacial que se propaga establemente en el medio. En el caso de que el medio se llegue a ionizar se forman canales de plasma, fenómeno conocido como filamentación. El estudio de los efectos que detienen el colapso y pueden dar lugar a propagación estable auto-atrapada es objeto de intensas investigaciones.

Por otra parte cuando se estudian pulsos de luz también existen los llamados solitones temporales, en donde la no linealidad cúbica compensa la dispersión cromática, y los solitones espaciotemporales, también llamados “balas de luz” (Wise y Trapani 2002), en donde los efectos no lineales en el espacio y en el tiempo (automodulación de la fase espacial y temporal) que llevan a la autofocalización en tres dimensiones (x, y, t) logran

⁷A veces se supone que el término de la no linealidad Kerr en realidad no tiene una expresión cúbica divergente sino que tiende asintóticamente a un valor, lo que se conoce como saturación de la no linealidad Kerr. Se trataría por ejemplo de contemplar para el índice no lineal en lugar de (1.38) la expresión $n_T = n_0 + n_2 I / (1 + I/I_S)$.

compensar la difracción y la dispersión cromática. Este trabajo no contempla la dispersión cromática. La longitud característica en la cual los fenómenos dispersivos empiezan a tener importancia está dada por $L_{\text{DISP}} \equiv \Delta t^2 / 2|k_0''|$, en donde Δt es la duración del pulso y $k_0'' \equiv \partial^2 k / \partial \omega^2|_{\omega_0}$, siendo $k(\omega) = n(\omega)\omega/c$, da idea de la dispersión de la velocidad de grupo (*group velocity dispersion*, GVD) que se produce cuando distintas frecuencias tienen distintas velocidades en el material. En pulsos de duración relativamente larga, como los de 200 femtosegundos ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$) que se suelen manejar, esta distancia será grande. Por ejemplo, en el aire, a una longitud de onda en el infrarrojo cercano ($\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 800 \text{ nm}$), tenemos una dispersión de $k_0'' = 0.2 \text{ fs}^2/\text{cm}$, y obtendremos $L_{\text{DISP}} = 1 \text{ km}$, suficiente para considerar la propagación sin dispersión si uno se mueve en el orden de las decenas de metros. En vidrio amorfo sin embargo la dispersión suele ser mayor en dos órdenes de magnitud y para la misma duración del pulso tenemos ya dispersión en unos pocos metros, aunque las muestras en las que se llevan a cabo experimentos con haces de Airy y de Bessel suelen ser más cortas.

1.5. Absorción multifotón

En muchas ocasiones la absorción de un fotón (lineal) no es propicia debido a que la energía del fotón no llega a igualar la diferencia entre dos niveles de energía. Esto sucede en los materiales que tratamos aquí, que son casi completamente transparentes a la frecuencia de la onda considerada. Sin embargo, cuando la intensidad de la onda es alta puede ocurrir que un conjunto de fotones iguale o supere la energía necesaria para la ionización del material (ionización multifotón) (Göppert-Mayer 1931). Al absorber energía el material deja de ser transparente y la onda inicial pierde parte de su intensidad. Esta absorción multifotón (*multiphoton absorption*, MPA) de hecho es uno de los mecanismos que puede impedir el colapso de la onda que ocurre como consecuencia de su autofocalización (LeMesurier 2000), junto con la GVD o la propia ionización, dependiendo de las condiciones experimentales. Por otro lado, mientras que en la filamentación producida por la autofocalización y colapso con haces de tipo gaussiano, los efectos del plasma producido por la ionización son importantes, en el mismo fenómeno con haces de Bessel o de Airy, los efectos del plasma no afectan decisivamente la propagación.

Usualmente, el orden de MPA dominante es el mínimo número de fotones necesario para la ionización. Para entender el efecto “puro” de la MPA, consideramos primero el caso de ondas planas. Es sabido que la intensidad disminuirá de acuerdo con la ley (Sheik-Bahae et al. 1990)

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\beta^{(M)} I^M, \quad (1.46)$$

en donde M es el número de fotones absorbidos simultáneamente y $\beta^{(M)}$ el coeficiente de absorción multifotón, también llamado coeficiente de Keldysh (Keldysh 1965), que depende del número de fotones, de la longitud de onda que incide y de características del material como la densidad atómica y la sección eficaz de ionización. La ecuación (1.46) se puede resolver analíticamente, dando como resultado

$$I = I_0 \left[1 + \beta^{(M)} I_0^{M-1} (M-1) z \right]^{-1/(M-1)}. \quad (1.47)$$

Figura 1.4: Evolución de la razón de pérdida no lineal de intensidad, I/I_0 , frente a la coordenada normalizada $\zeta = \beta^{(M)} I_0^{M-1} z$.

en donde I_0 será la intensidad inicial. Ejemplos de comportamiento de esta evolución se dan en la figura 1.4.

Puesto que $I = A^2$, la ecuación correspondiente para la amplitud A es $\partial A / \partial z = -\beta^{(M)} A^{2M-1} / 2$. Por tanto, si se tienen en cuenta el efecto conjunto de la difracción, la no linealidad Kerr para ondas no planas, y la MPA, la ecuación de Schrödinger (1.40) completada con esta absorción no lineal es

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} A + i \frac{k_0}{n_0} n_2 |A|^2 A - \frac{\beta^{(M)}}{2} |A|^{2M-2} A. \quad (1.48)$$

Debido a que los efectos de MPA suelen ser relevantes a intensidades mucho mayores que las intensidades a las que el efecto Kerr lo es, se suele contemplar también el término cuadrático en la intensidad en (1.38), $n_T \simeq n_0 + n_2 I + n_4 I^2$, lo que implica un término cuártico en la amplitud, es decir, quíntico en la ecuación no lineal, lo que se expresa generalmente como

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} A + i f(|A|^2) A - \frac{\beta^{(M)}}{2} |A|^{2M-2} A, \quad (1.49)$$

en donde $f(u) \equiv k_0(n_2 u + n_4 u^2)/n_0$.

De acuerdo con la ecuación (1.47), existe una distancia típica en donde los efectos de la MPA empiezan a tomar relevancia, dada por

$$L_{\text{MPA}} \equiv \frac{1}{\beta^{(M)} I_0^{M-1}}. \quad (1.50)$$

También se puede calcular la intensidad a la que los efectos de absorción no lineal son importantes en un medio de longitud L , sin más que despejar de (1.50), obteniendo $I_{\text{MPA}} = (1/\beta L)^{1/M-1}$. Una intensidad importante es aquella para la que los efectos de absorción

no lineal y de difracción son del mismo orden. Poniendo $L_{\text{MPA}} = L_{\text{R}}$ llegamos a

$$I_{\text{MPA-R}} = \left(\frac{2}{\beta^{(M)} k_0 w_0^2} \right)^{\frac{1}{M-1}}. \quad (1.51)$$

De esta forma podemos predecir también cuál sería la intensidad necesaria para provocar que, en un medio dado, los tres efectos, difracción, absorción no lineal y autofocalización, entren en competencia a una determinada distancia. Por ejemplo, para el aire, con $n_0 \simeq 1$ y $n_2 = 3.2 \times 10^{-19} \text{ cm}^2/\text{W}$, el orden de absorción típico a 800 nm es $M = 8$, con un coeficiente de $\beta^{(8)} = 1.8 \cdot 10^{-94} \text{ cm}^{13}/\text{W}^7$ (Couairon et al. 2013). Si suponemos una anchura de haz en la ecuación (1.51) del orden del milímetro, obtenemos una intensidad de $I_0 \sim 10 \text{ TW}/\text{cm}^2$, a la cual tendríamos ya competencia entre los tres efectos en el orden del metro. Y para el vidrio, con $n_0 = 1.461$ y $n_2 = 4.1 \times 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$, el orden de absorción a 800 nm es $M = 5$, y el coeficiente $\beta^{(5)} = 3.5 \times 10^{-50} \text{ cm}^7/\text{W}^4$ (Gaizauskas et al. 2008). Con estos datos para un haz de una centésima de milímetro de anchura a una intensidad de $I_0 \sim 0.5 \text{ TW}/\text{cm}^2$ las tres distancias características coinciden en el medio milímetro. Esto ilustra la situación típica en la que nos vamos a mover en esta tesis.

1.6. Conclusión

Hemos establecido el modelo que va a ser usado para estudiar la propagación de haces de Airy y Bessel en medios no lineales, la NSE, contemplando por separado los tres fenómenos básicos que influyen sustancialmente en la propagación. La difracción, que tenderá a dispersar espacialmente los haces, ilustrada con el prototipo del haz gaussiano; la automodulación espacial de la fase, que dará lugar a una autofocalización de los haces para potencias mayores que la potencia crítica, y la absorción no lineal multifotón, que constituirá un elemento disipativo de los mismos a intensidades suficientemente altas a lo largo de su propagación. Se han estimado las intensidades a las cuales estos efectos pueden competir, pudiendo dar lugar, como se verá en los capítulos posteriores, a haces no lineales de Airy y de Bessel que no muestran difracción ni atenuación en la propagación.

PROPAGACIÓN DE HACES DE AIRY EN MEDIOS KERR CON ABSORCIÓN NO LINEAL

Este capítulo constituye un análisis detallado de la propagación de haces de Airy lineales en medios Kerr con absorción no lineal. Primero se introducen los haces de Airy lineales como soluciones no difractantes de la LSE. En el estudio de la propagación no lineal es importante analizar la posible existencia de haces no difractantes no lineales (estados estacionarios no lineales). Por eso se introducen los haces de Airy no lineales como soluciones no difractantes de la NSE (Lotti et al. 2011). En el transcurso de las investigaciones se ha encontrado que el comportamiento asintótico de estos haces es fundamental para la explicación de la dinámica. Establecidas estas bases, a partir de simulaciones numéricas masivas, se encuentra que los haces de Airy no lineales se forman espontáneamente a partir del haz de Airy lineal introducido en el medio. La principal aportación original de este capítulo es la identificación de este haz de Airy no lineal atractor de la dinámica, dado un haz de Airy lineal inicial, a partir de una ley de conservación descubierta en la dinámica no lineal. Hemos verificado la validez de esta ley incluso en simulaciones numéricas que reproducen los montajes experimentales reales para la producción de haces de Airy.

2.1. Haces de Airy en medios lineales

A finales de los años setenta del pasado siglo, la comunidad científica fue sorprendida por un artículo (Berry y Balazs 1979) que describía un paquete de ondas, solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre, de densidad de probabilidad $|\psi(x, t)|^2$, *i.e.* $i\hbar \partial\psi/\partial t = -\hbar^2/2m \partial^2\psi/\partial^2x$, que no se ensanchaba en su evolución temporal, al mismo tiempo que se autoaceleraba sin ninguna fuerza actuando sobre él,

$$\psi(x, t) = \text{Ai} \left[\frac{B}{\hbar^{2/3}} \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} \right) \right] e^{(iB^3 t/2m\hbar)[x - (B^3 t^2/6m^2)]}, \quad (2.1)$$

con $B > 0$ constante arbitraria (en el apéndice A se deriva esta solución en coordenadas normalizadas). Este paquete contiene la función de Airy, $\text{Ai}(x)$, aparecida por primera vez en dos trabajos del astrónomo británico G. B. Airy (Airy 1838; Airy 1849) encaminados a modelar el perfil transversal de intensidad de un arco iris por medio de una fase cúbica. La densidad de probabilidad asociada $\text{Ai}^2(x)$ la representamos en la figura 2.1, en donde

se aprecia una onda con unos notables lóbulos principales, que tiende exponencialmente a cero en las coordenadas positivas y que posee una cola negativa de probabilidad débilmente localizada. En Óptica bastará cambiar el término probabilidad por el de intensidad.

En el artículo de Berry se explica que este extraño comportamiento no viola el teorema de Ehrenfest (Cohen-Tannoudji, Diu, y Laloë 1977), según el cual cuando sobre una partícula cuántica no actúa ninguna fuerza externa el valor esperado de la posición debe moverse con velocidad constante, porque esta función no es de cuadrado integrable y por tanto no se puede calcular un valor esperado de la posición. El comportamiento asintótico para grandes valores de $|x|$ es (Olver 2010):

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\rho}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.2)$$

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \cos(\rho - \pi/4), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.3)$$

donde $\rho \equiv 2/3[\text{sgn}(x)x]^{3/2}$. Es decir, el módulo al cuadrado $|\text{Ai}(x)|^2 \rightarrow (-x)^{-1/2}$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y no será integrable. Berry demostró además que aparte de la solución trivial de onda plana, la función de Airy era el único paquete posible no difractante solución en una dimensión de la ecuación de Schrödinger libre, y atribuyó esta paradoja al hecho de que la función de onda para él no describía la Física de una partícula sino más bien de un conjunto de órbitas de partículas. D. M. Greenberger (Greenberger 1980) sin embargo argumentó poco después que una ecuación de Schrödinger sometida a un campo lineal podía transformarse en la ecuación libre cuya solución era el paquete de Airy, con lo que también se podía interpretar como una partícula clásica sometida a un campo gravitacional constante¹, siguiendo la filosofía del principio de equivalencia. Recientemente se ha demostrado que esta solución se obtiene como cierto límite de una solución de cuadrado integrable (Lekner 2009).

Fue el campo de la Óptica sin embargo, el que décadas después volvería a poner en primer plano los haces de Airy, gracias a la predicción (Siviloglou y Christodoulides 2007) y a la observación experimental (Siviloglou et al. 2007) de haces de luz de Airy tanto en una como en dos dimensiones transversales $[(1+1)\text{D}, (2+1)\text{D}]$. El hecho remarcado por Berry de la no integrabilidad del cuadrado de estas funciones, trasladado al campo de la Óptica significa que los haces de Airy ideales transportan potencia infinita, lo que permite disponer de un almacén o reservorio de energía en la cola del haz que, como veremos, ayuda a entender la propagación estacionaria o no difractante y la recomposición de estas ondas (Mlejnek et al. 1999; Liu et al. 2005). Los haces observados, lógicamente, transportaban potencia finita, lo que matemáticamente correspondía a hacer a sus envolventes complejas de cuadrado integrable, por medio, por ejemplo, de multiplicarlas por una función que aminorara la contribución de la cola del haz hasta hacerla irrelevante, método que se conoce con el nombre de “apodización”.

Desde entonces se han publicado una ingente cantidad de trabajos sobre estos haces en el terreno de la Óptica, sus propiedades (Bandres 2008; Broky et al. 2008), su evolución

¹Como viene, por ejemplo, descrita en el libro de Landau de Mecánica Cuántica (Landau y Lifshitz 1958), en donde también aparece la función de Airy en este contexto.

Figura 2.1: Función de Airy al cuadrado.

en diferentes medios no lineales (Abdollahpour et al. 2010; Fattal, Rudnick, y Marom 2011; Lotti et al. 2011; Panagiotopoulos et al. 2013; Zhang et al. 2014; Panagiotopoulos et al. 2012), generalizaciones a la teoría no paraxial (Zhang et al. 2012), vectorial (Kaminer et al. 2012) o completamente no lineal (Kaminer, Segev, y Christodoulides 2011), y aplicaciones tan diversas como el aclaramiento de partículas (Baungartl, Mazilu, y Dholakia 2008) o la creación de canales de plasma curvados (Polynkin et al. 2009). Parece que sólo recientemente, en 2013, de alguna manera se ha pagado la deuda contraída con la Mecánica Cuántica gracias a la creación de un paquete de onda de Airy formado por electrones libres (Volochnykh et al. 2007), usando la misma LSE que la aproximación paraxial en Óptica deducida a partir de la ecuación relativista de Klein-Gordon.

En (1+1)D la ecuación de Schrödinger lineal (1.17) se reduce a

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (2.4)$$

cuya solución, para una condición inicial de tipo Airy, $A(x, z=0) = a_0 \text{Ai}(x/x_0)$, siendo x_0 una longitud arbitraria y a_0 un parámetro de amplitud inicial, es el haz de Airy no difractante moviéndose a lo largo de una trayectoria parabólica:

$$A(x, z) = a_0 \text{Ai} \left[\frac{1}{x_0} \left(x - \frac{z^2}{4k_0^2 x_0^3} \right) \right] \exp \left[i \frac{z}{2k_0 x_0^3} \left(x - \frac{z^2}{6k_0^2 x_0^3} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Si uno compara la anterior expresión con la de Berry para partículas materiales (2.1), teniendo en cuenta que el papel del tiempo lo juega aquí la coordenada de propagación z , se obtiene la analogía $x_0 \sim \hbar^{2/3}$ y $k_0^2 \sim m^2/\hbar^2$.

La amplitud real de la onda

$$|A| = a_0 \text{Ai} \left[\frac{1}{x_0} \left(x - \frac{z^2}{4k_0^2 x_0^3} \right) \right] \quad (2.6)$$

y por tanto la intensidad $I = |A|^2$ mantiene su forma en la propagación, es decir, es un haz no difractante, al mismo tiempo que se va desplazando a lo largo de una trayectoria

Figura 2.2: Trayectoria parabólica del haz de Airy ($k_0 = 10^5 \text{ cm}^{-1}$, $x_0 = 0.1 \text{ cm}$). Superpuesta imagen de un haz de Airy de Phys. Rev. Lett. **99**, 213901 (Siviloglou et al. 2007).

parabólica. Por ejemplo, el valor de la amplitud en $x = 0$ para $z = 0$ sigue la trayectoria $x = z^2/4k_0^2x_0^3$ (figura 2.2). Con el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\xi &\equiv \frac{x}{x_0} \\ \zeta &\equiv \frac{z}{k_0 x_0^2}\end{aligned}, \quad (2.7)$$

la ecuación de Schrödinger lineal (2.4) y su solución para la condición inicial $A(\xi, \zeta = 0) = a_0 \text{Ai}(\xi)$ se escriben de modo más compacto como

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}, \quad (2.8)$$

$$A(\xi, \zeta) = a_0 \text{Ai} \left[\xi - (\zeta/2)^2 \right] \exp \left[i \left(\xi \zeta / 2 - \zeta^3 / 12 \right) \right], \quad (2.9)$$

como se puede ver en el cálculo que mostramos en el apéndice A.

Puesto que x_0 nos da una medida de la anchura del lóbulo principal del haz de Airy, su anchura en las nuevas variables es del orden de la unidad, y ζ mide la distancia de propagación en unidades de la distancia de difracción asociada a este lóbulo principal. La otra peculiaridad del haz de Airy es su carácter no difractante, lo cual solo es posible en haces débilmente localizados transversalmente de modo que transportan potencia infinita.

2.2. Haces de Airy no lineales

En este trabajo nos interesamos por la propagación no lineal de un haz de Airy introducido en un medio Kerr en un régimen donde las pérdidas de potencia por absorción no lineal son importantes (Ruiz-Jiménez, Nóbrega, y Porras 2015). Por tanto utilizaremos la NSE (1.48), que en las nuevas variables (2.7) quedaría

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + i \frac{k_0^2 x_0^2 n_2}{n_0} |A|^2 A - \frac{\beta^{(M)} k_0 x_0^2}{2} |A|^{2M-2} A. \quad (2.10)$$

A fin de reducir al máximo el número de parámetros libres involucrados en el problema, es conveniente también introducir la amplitud compleja adimensional $\tilde{A} = (\beta^{(M)} k_0 x_0^2 / 2)^{1/2M-2} A$, lo que nos lleva a

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \zeta} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi^2} + i\alpha |\tilde{A}|^2 \tilde{A} - |\tilde{A}|^{2M-2} \tilde{A}, \quad (2.11)$$

en donde

$$\alpha \equiv \frac{k_0^2 x_0^2 n_2}{n_0} \left(\frac{2}{\beta^{(M)} k_0 x_0^2} \right)^{\frac{1}{M-1}}. \quad (2.12)$$

En el régimen de propagación en el que los efectos de la absorción no lineal son importantes, la amplitud adimensional es del orden de la unidad. Más aún, dada la forma de (2.9), es conveniente trabajar con un sistema de referencia que se mueva con la trayectoria parabólica del haz, para poder apreciar mejor los efectos no lineales que afectan al haz de Airy lineal. Estas coordenadas serían

$$\begin{aligned} u &\equiv \xi - (\zeta/2)^2, \\ v &\equiv \zeta \end{aligned}, \quad (2.13)$$

es decir, u será a partir de ahora la coordenada transversal corregido el movimiento parabólico lateral de la onda y v nos dará la distancia de propagación. Con este cambio la NSE queda

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial v} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial u^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial u} + i\alpha |\tilde{A}|^2 \tilde{A} - |\tilde{A}|^{2M-2} \tilde{A}. \quad (2.14)$$

La ecuación sin términos no lineales tendrá la solución (2.9), que en las nuevas variables será $A(u, v) = a_0 \text{Ai}(u) \exp[i\phi_L(u, v)]$, en donde se define la fase lineal por $\phi_L(u, v) \equiv uv/2 + v^3/24$.

En el estudio de la propagación no lineal es fundamental investigar sobre posibles estados estacionarios no lineales, alrededor de los cuales suele transcurrir la dinámica. Buscamos, como en el artículo de Lotti (Lotti et al. 2011), soluciones de (2.14) con propagación estacionaria (o no difractantes) de la forma

$$\tilde{A}(u, v) = a(u) e^{i\psi(u)} e^{i\phi_L(u, v)}, \quad (2.15)$$

de modo que la distribución transversal de intensidad no depende de la distancia de propagación v . Aquí $\psi(u)$ representa una posible fase no lineal añadida a la fase lineal ϕ_L del haz lineal. Sustituyendo en (2.14), una vez separadas las partes real e imaginaria, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2 a}{du^2} = ua + \left(\frac{d\psi}{du} \right)^2 a - 2\alpha a^3, \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 \psi}{du^2} = -\frac{2}{a} \frac{d\psi}{du} \frac{da}{du} - 2a^{2M-2}. \quad (2.17)$$

Soluciones físicamente válidas (que representen el perfil transversal de un haz de luz) deberán cumplir la condición de localización $a(u) \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow \pm\infty$. Para investigar la existencia de soluciones de tipo “Airy” imponemos además un comportamiento de la forma $a(u) e^{i\psi(u)} = a_0 \text{Ai}(u)$ para $u \rightarrow \infty$, ya que la solución debe reducirse a la solución

Figura 2.3: Haces de Airy no lineales (NABs) para $M = 5$ y $\alpha = 1$. Perfiles de intensidad en grises cada vez más oscuros desde el haz lineal, $a_0 = 1.500$, $a_0 = 4.000$, $a_0 = 4.325$ hasta $a_0 = a_{0,\max} \sim 4.343$.

lineal a bajas intensidades. En la práctica, se han resuelto (2.16) y (2.17) con las condiciones iniciales $a(u_0) = a_0 \text{Ai}(u_0)$, $da(u_0)/du = a_0 d\text{Ai}(u_0)/du$, $\psi(u_0) = 0$ y $d\psi(u_0)/du = 0$, siendo u_0 un valor de la coordenada transversal suficientemente positivo. En el apéndice B mostramos el método de resolución numérica.

Se encuentra que de hecho existen soluciones, a las que llamaremos haces de Airy no lineales (*nonlinear Airy beams*, NABs), y que para un orden de MPA dado, M , dependen de dos parámetros, α , que determina la no linealidad Kerr y a_0 que controla la amplitud o intensidad de la solución. En la figura 2.3 se muestran algunos ejemplos.

2.2.1. Mecanismo de estacionariedad

Los haces de Airy no lineales tienen la propiedad de conservar su perfil transversal en la propagación a pesar de la difracción, la no linealidad Kerr e, incluso, la absorción no lineal. Como se puede ver en la figura 2.3, hay una marcada pérdida de contraste de los lóbulos respecto al haz de Airy lineal, además de la compresión típica de los lóbulos debido a la autofocalización. La ecuación (2.17) se puede leer además como $a^2\psi'' + 2a\psi'a' = -2a^{2M}$, y por tanto se tiene la ecuación de continuidad

Figura 2.4: Haz de Airy no lineal (NAB). Mecanismo de estacionariedad, $\psi'a^2(u) = N_u$.

$$\psi' a^2 = \int_u^\infty 2a^{2M} du \equiv N_u, \quad (2.18)$$

en donde las primas denotan derivación respecto a u . De este modo, como indica la figura 2.4, la pérdida no lineal de potencia por unidad de distancia de propagación debida a la absorción no lineal, especialmente en los lóbulos más intensos del haz, en un intervalo cualquiera $[u, \infty]$, N_u , es compensada por un flujo de potencia neto por unidad de distancia de propagación $\psi' a^2$ que llega a u desde el reservorio de potencia de la cola débilmente localizada del haz. Este es el mecanismo por el que el haz de Airy no lineal puede propagarse sin atenuación en un medio con absorción no lineal.

Nuestras simulaciones numéricas nos muestran que, dados los parámetros físicos de interacción Kerr α y absorción no lineal M , existen soluciones del sistema (2.16) y (2.17) que verifican la condición de localización sólo hasta un cierto valor máximo del parámetro que controla la amplitud, es decir, $a_0 < a_{0,\max}$. Por ejemplo para el caso $M = 5$ sin Kerr ($\alpha = 0$) obtenemos $a_{0,\max} \sim 1.72$ y para $\alpha = 1$, obtenemos $a_{0,\max} \sim 4.34$. Como se ve en la figura 2.3, el contraste de las oscilaciones típica del haz de Airy lineal desaparece gradualmente cuando nos acercamos al límite de $a_{0,\max}$.

2.3. Comportamiento asintótico. Haces límite

A continuación haremos un análisis más detallado del comportamiento asintótico de los NABs que nos dará más detalles acerca de este contraste de oscilaciones y las correspondientes pérdidas no lineales, y que, como se verá, es fundamental para entender la dinámica de haces de Airy lineales en medios no lineales.

Suponiendo pérdidas totales de potencia por unidad de distancia de propagación finitas, $N_{-\infty} = \int_{-\infty}^\infty 2a^{2M} du < \infty$, asintóticamente, para $u \rightarrow -\infty$, se tiene que $\psi' a^2 \simeq N_{-\infty}$ y la ecuación (2.16) queda

$$\frac{d^2 a}{du^2} - ua - \frac{N_{-\infty}^2}{a^3} - 2\alpha a^3 = 0, \quad (2.19)$$

que es una ecuación de tipo Newton, con lo que podemos ensayar la analogía newtoniana para calcular la expresión asintótica de la amplitud de los haces de Airy no lineales analíticamente. Para ello de nuevo realizamos el cambio $\rho = 2/3(-u)^{3/2}$ y $a(u) = b(\rho)/(-u)^{1/4}$ y nos queda, una vez despreciados los términos que desaparecen en la cola, la “ecuación del movimiento”

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b}{d\rho^2} &= -b + \frac{N_{-\infty}^2}{b^3} \equiv -\frac{dV}{db} \\ V &\equiv \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{N_{-\infty}^2}{b^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

análoga a la ecuación del movimiento en el “tiempo” ρ de una partícula de posición b sometida a una fuerza conservativa de energía potencial V . Por tanto, se podrá definir una “energía” conservada $E \equiv (1/2)(db/d\rho)^2 + V$, o lo que es lo mismo, $d\rho = db/\sqrt{2(E - V)}$,

Figura 2.5: Perfiles de intensidad en escala logarítmica de los NABs correspondientes a un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$ en escala de grises creciente con a_0 . El haz límite LNAB ($a_0 \simeq a_{0,\max}$) con distinto comportamiento asintótico se destaca en negro.

que integrada proporciona la expresión asintótica para la intensidad del haz, una vez deshechos los cambios de variable,

$$a^2 \simeq \frac{E}{(-u)^{1/2}} \left\{ 1 + C \sin \left[\frac{4}{3}(-u)^{3/2} + \phi \right] \right\}, \quad (2.21)$$

donde $C \equiv (1 - N_{-\infty}^2/E^2)$ con $N_{-\infty} < E$. La expresión revela que el comportamiento asintótico para $u \rightarrow -\infty$ es del mismo tipo que el del haz de Airy lineal, como puede verse en la ecuación (2.3), tendiendo a cero como $(-u)^{-1/2}$ de forma oscilatoria con un contraste $C < 1$ reducido respecto al caso lineal de $C = 1$. En la figura 2.5 en doble escala logarítmica se muestra que los perfiles transversales de intensidad muestran en efecto esta forma asintótica cuando $a_0 < a_{0,\max}$.

En la figura 2.6 se observan las pérdidas $N_{-\infty}$ y el contraste C para NABs con distintos valores de a_0 hasta su valor máximo en un medio con $M = 5$ evaluados a partir del perfil numérico del NAB. Las pérdidas en todo el perfil transversal se mantienen finitas para cualquier $a_0 < a_{0,\max}$, con una gradual pérdida de contraste a medida que se aumenta la intensidad inicial. Cuando a_0 crece, las pérdidas crecen sin límite mientras que el contraste de las oscilaciones tiende a cero, tanto para el caso sin Kerr ($\alpha = 0$) como con Kerr ($\alpha = 1$).

En el límite $a_0 \rightarrow a_{0,\max}$, las pérdidas $N_{-\infty}$ se hacen infinitas y el análisis asintótico anterior no es válido. De hecho, la curva negra de la figura 2.5 correspondiente al perfil de intensidad en este límite, tiende a cero, por lo que representa también un haz de luz, pero lo hace mucho más lentamente. Por tanto, prescindiendo de la suposición de que $N_{-\infty} < \infty$, suponemos un comportamiento genérico $a \simeq b(-u)^{-\sigma}$ para $u \rightarrow -\infty$, donde b y σ son constantes a determinar, con $\sigma < 1/4$. Si con esto integramos en (2.18), obtenemos

$$\frac{d\psi}{du} a^2 \simeq 2 \int_u^\infty b^{2M} (-u)^{-2M\sigma} du = 2b^{2M} \frac{(-u)^{-2M\sigma+1}}{-2M\sigma+1}. \quad (2.22)$$

Despejando $d\psi/du$ y sustituyéndolo en (2.18) se obtiene

$$b\sigma(\sigma+1)(-u)^{-\sigma-2} + b(-u)^{-\sigma+1} - \frac{4b^{4M-3}(-u)^{2-\sigma(4M-3)}}{(1-2M\sigma)^2} + 2\alpha b^3(-u)^{-3\sigma} \simeq 0, \quad (2.23)$$

para el comportamiento asintótico de la amplitud a . Puede verse fácilmente que el segundo

Figura 2.6: Pérdidas no lineales $N_{-\infty}$ y contraste de las oscilaciones $C \equiv (1 - N_{-\infty}/E^2)$ de NABs, en un medio con $M = 5$ y $\alpha = 0$ (curva negra) o $\alpha = 1$ (curva verde), como funciones del parámetro de intensidad a_0 del NAB.

y el tercer términos de la izquierda se cancelan mutuamente si

$$b = \left[\frac{M-2}{4(M-1)} \right]^{1/(2M-2)}, \quad \sigma = \frac{1}{4M-4}, \quad (2.24)$$

siendo en este caso los otros dos términos asintóticamente despreciables (decaen más rápido para $-u \rightarrow \infty$), y verificándose, que en efecto las perdidas $N_{-\infty}$ son infinitas.

La resolución numérica de las ecuaciones (2.16) y (2.17) muestra que la solución con $a_0 = a_{0,\max}$ presenta en efecto este comportamiento asintótico, como puede verse en la figura 2.5. La amplitud de este haz de Airy no lineal, que llamaremos límite (*limiting nonlinear Airy beam*, LNAB) tiende a cero cuando $u \rightarrow -\infty$ como $(-u)^{1/4M-4}$, es decir, de forma más suave que los NABs anteriormente estudiados.

2.4. Componentes de Hänkel

Cuando $a_0 < a_{0,\max}$, el comportamiento asintótico en (2.21) puede expresarse en términos más físicos por medio de haces de Hänkel. Es sabido que la función de Airy se puede escribir como superposición de dos funciones de Hänkel de orden $1/3$ de la forma (Olver 2010)

$$\text{Ai}(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-u}{3}} \left[e^{i\pi/6} H_{1/3}^{(1)}(\rho) + e^{-i\pi/6} H_{1/3}^{(2)}(\rho) \right], \quad (2.25)$$

donde $\rho = 2/3(-u)^{3/2}$. De este modo, el haz de Airy lineal (2.9) se puede escribir también como

$$a_0 \text{Ai}(u) e^{i\phi_L(u,v)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-u}{3}} \left[a_0 e^{i\pi/6} H_{1/3}^{(1)}(\rho) + a_0 e^{-i\pi/6} H_{1/3}^{(2)}(\rho) \right] e^{i\phi_L(u,v)}. \quad (2.26)$$

Así, el haz de Airy se puede expresar como la superposición lineal de dos haces, llamados haces de Hänkel, de la misma amplitud.

Figura 2.7: Amplitudes de las componentes de Hankel de los NABs para un medio con $M=5$ con y sin Kerr (lineas negra y verde). En línea discontinua se representan los valores de $a_{0,\max}$ en cada caso.

De modo análogo, un haz de Airy no lineal está descrito, *asintóticamente* para $u \rightarrow -\infty$ por (Lotti et al. 2011)

$$a(u)e^{i\psi(u)}e^{i\phi_L(u,v)} \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-u}{3}} \left[a_{\text{out}}e^{i\pi/6}H_{1/3}^{(1)}(\rho) + a_{\text{in}}e^{-i\pi/6}H_{1/3}^{(2)}(\rho) \right] e^{i\phi_L(u,v)}, \quad (2.27)$$

con distintas amplitudes a_{out} y a_{in} para las amplitudes de los dos haces de Hankel lineales. De hecho, teniendo en cuenta los desarrollos

$$\begin{aligned} H_{1/3}^{(2)}(\rho) &= \sqrt{\frac{3}{-u}}e^{i\pi/6} [\text{Ai}(u) + i\text{Bi}(u)], \\ H_{1/3}^{(1)}(\rho) &= \sqrt{\frac{3}{-u}}e^{-i\pi/6} [\text{Ai}(u) - i\text{Bi}(u)], \end{aligned} \quad (2.28)$$

en donde $\text{Bi}(x)$ es la funci3n de Airy de segunda especie, y las expresiones asint3ticas para $u \rightarrow -\infty$ (Olver 2010)

$$\begin{aligned} \text{Ai}(u) &\simeq \frac{\text{sen}(\rho + \pi/4)}{\sqrt{\pi}(-u)^{1/4}}, \\ \text{Bi}(u) &\simeq \frac{\cos(\rho + \pi/4)}{\sqrt{\pi}(-u)^{1/4}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

el m3dulo al cuadrado del segundo termino de (2.27) da

$$a^2 \simeq \frac{1}{(-u)^{1/2}} \frac{|a_{\text{in}}|^2 + |a_{\text{out}}|^2}{4\pi} \left[1 + \frac{2|a_{\text{in}}||a_{\text{out}}|}{|a_{\text{in}}|^2 + |a_{\text{out}}|^2} \text{sen}(2\rho + \arg(a_{\text{out}}) - \arg(a_{\text{in}})) \right], \quad (2.30)$$

que comparada con (2.21) nos lleva a las igualdades $\arg(a_{\text{out}}) - \arg(a_{\text{in}}) = \phi$ y

$$|a_{\text{in}}|^2 = 2\pi(E + N_{-\infty}), \quad |a_{\text{out}}|^2 = 2\pi(E - N_{-\infty}). \quad (2.31)$$

Estas relaciones, aunque aparentemente abstractas, son fundamentales, como se verá en las siguientes secciones, para entender la dinámica de haces de Airy en medios no lineales. En particular, de la relación (2.31) se deduce que

$$\frac{|a_{\text{in}}|^2 - |a_{\text{out}}|^2}{4\pi} = N_{-\infty}. \quad (2.32)$$

Comparándola con la expresión (2.18) se ve que el flujo de energía que proviene asintóticamente desde valores de u muy negativos hacia valores positivos de u , y que compensan las pérdidas totales en la propagación, $N_{-\infty}$, es el resultado de un flujo de energía hacia las u 's positivas debidas al haz de Hänkel lineal $H^{(2)}$, y un flujo de energía hacia las u 's negativas debidas al haz de Hänkel lineal $H^{(1)}$. En el haz de Airy en un medio lineal transparente, $a_{\text{in}} = a_{\text{out}} = a_0$, no existiendo un flujo neto de energía. En el haz de Airy no lineal en un medio con absorción no lineal, es precisamente la diferencia de amplitudes de las dos componentes la que da lugar al flujo neto de energía para compensar las pérdidas no lineales. En particular, dado que $N_{-\infty} > 0$, para todo NAB se cumplirá que $|a_{\text{in}}| > |a_{\text{out}}|$.

Por medio de los perfiles de intensidad de los NABs calculados numéricamente, obtenemos los valores de E y $N_{-\infty}$ y por tanto podremos deducir el valor de las amplitudes de las componentes de Hänkel, $|a_{\text{in}}|$ y $|a_{\text{out}}|$, para cada NAB. En la figura 2.7 se representan estas amplitudes en función del parámetro de intensidad a_0 del NAB en medios con no linealidad Kerr $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ y absorción no lineal con $M = 5$. También, de los perfiles transversales de los NAB obtenidos numéricamente, puede verse que a_{in} y a_{out} son reales en medios sin Kerr ($\alpha = 0$), y sus argumentos verifican $\arg(a_{\text{out}}) = -\arg(a_{\text{in}})$ en medios con Kerr ($\alpha \neq 0$). Hemos publicado resultados similares para el caso de haces de Bessel con y sin vórtices (Porrás y Ruiz-Jiménez 2014), que serán explicados en el próximo capítulo.

Por otro lado, cuando $a_0 = a_{0,\text{max}}$, en los LNAB estudiados en la sección 2.3 y representados en la figura 2.5 no se observa el comportamiento asintótico en forma de colas de Hänkel lineales, sino que son no lineales en todo su perfil, por ser, como se ha comentado, fuertemente disipativos. En este límite, las pérdidas no lineales son infinitas, como se vio.

2.5. Propagación de haces de Airy ideales en medios no lineales

En esta sección se estudia numéricamente la propagación o dinámica no lineal de haces de Airy ideales (con reservorio de energía infinito o no apodizados) cuando son introducidos en un medio no lineal Kerr con absorción no lineal. El resultado de estas simulaciones es que el haz de Airy lineal se transforma gradualmente en un haz de Airy no lineal de los estudiados en la sección 2.2, que parece actuar como atractor de la dinámica no lineal.

Para ello se ha resuelto numéricamente la NSE en la forma (2.14) en un medio con no linealidad Kerr α y absorción no lineal de orden M utilizando como condición inicial en $v=0$ el haz de Airy lineal incidente en el medio, de parámetro de amplitud a_0 , es decir, $\tilde{A}(u, v=0) = a_0 \text{Ai}(u)$.

En la resolución numérica se usa el llamado split-step Fourier method (SSFM) (Weideman y Herbst 1986; Agrawal 2001). Este método basa su eficacia en el uso de la transformada rápida de Fourier, de ahí que se le conozca también como FFT-BPM (Fast Fourier Transform Beam Propagation Method). El SSFM es explicado en el apéndice C y en el apéndice D damos una explicación detallada de los cálculos que hemos efectuado en este caso concreto.

Otro de los requisitos que debemos contemplar es el de que la dinámica se encuentre en un régimen de intensidad en donde los efectos de MPA sean dominantes frente a los demás, y que por tanto no se puedan formar estructuras solitónicas debidas al efecto Kerr (Allayarov y Tsoy 2014; Zhang et al. 2014). Para este propósito basta considerar valores de α no mucho más grandes que la unidad.

En las figuras 2.8 y 2.9 se muestra un ejemplo de la propagación. El haz de Airy inicial se caracteriza por $a_0 = 2.5$, la no linealidad Kerr del medio es $\alpha = 1$ y la absorción multifotón de orden $M = 5$. Las curvas negras en 2.8 representan el perfil transversal de intensidad a distintas distancias de propagación. En la figura 2.9 se representa la intensidad pico y las pérdidas no lineales $N_{-\infty}$ en función de la distancia de propagación. Como se puede apreciar, el haz de Airy es inicialmente fuertemente absorbido debido a la absorción no lineal, pero al contrario de lo que le ocurriría a una onda plana (como en la figura 1.4 del capítulo 1), la intensidad pico no tiende a cero, como se aprecia en la figura 2.9, sino que se estabiliza en un valor no nulo, al mismo tiempo que las pérdidas por absorción se hacen constantes. El perfil transversal de intensidad también se estabiliza en el perfil transversal de cierto haz de Airy no lineal (curva roja), que parece así que tiende a formarse espontáneamente a partir del haz del haz de Airy inicial. Se encuentra numéricamente que el haz de Airy no lineal que tiende a formarse, encontrado como el que mejor se ajusta al perfil del haz de Airy propagado, se caracteriza por $a_0 = 4.13$.

Resultados similares se obtienen para otros valores de las no linealidades y otros haces de Airy iniciales. Estas simulaciones numéricas nos permiten concluir que los haces de Airy no lineales actúan como atractores de la dinámica no lineal de un haz de Airy que se propaga en el medio no lineal.

2.6. Problema de selección

El hecho de que los haces de Airy no lineales se forman espontáneamente en la dinámica de un haz de Airy lineal fue sugerido en el artículo de Lotti (Lotti et al. 2011). El problema que quedaba por resolver, y es de fundamental importancia para la aplicación de los haces de Airy en el aclaramiento de partículas (Baungartl, Mazilu, y Dholakia 2008) o la creación de canales de plasma, es determinar cuál es precisamente el haz de Airy no

Figura 2.8: Para un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$, perfiles transversales de intensidad según aumenta la distancia de propagación, v , del haz de Airy ideal (en negro) con $a_0 = 3.5$ hacia el NAB atractor de la dinámica (en rojo) con $a_0 = 4.13$, cuya amplitud de la componente entrante de Hänkel es $|a_{\text{in}}| = 3.5$.

Figura 2.8 (cont.): Continuación de las figuras de la página anterior, de perfiles transversales de intensidad según aumenta la distancia de propagación, v , en donde se aprecia claramente la formación del NAB aludido a una distancia de propagación de $v \simeq 64$. Una vez formado este haz se propaga sin cambios en su perfil transversal de intensidad en este caso ideal.

Figura 2.9: Pérdidas no lineales ($N_{-\infty} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{A}|^2 du$) en negro e intensidad pico en gris en función de la coordenada de propagación v de un haz de Airy ideal con $a_0 = 3.5$ introducido en un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$.

Figura 2.10: Conservación de la componente de Hnkel. En lneas continuas, sin y con Kerr (verde y negro), se representa la amplitud entrante caracterstica $a_0(0)$ frente a la caracterstica del NAB alcanzado, $a_0(\infty)$. En lneas discontinuas las componentes de Hnkel, observando que en efecto la componente entrante representa la funcin identidad, es decir, es conservada: $|a_{in}(\infty)| = a_0(0)$.

lineal atractor, es decir, de todos los que existen con $0 < a_0 < a_{0,max}$ en el medio no lineal caracterizado por α y M , cul es el valor del a_0 del haz de Airy no lineal atractor. Este es el llamado “problema de seleccin”, originalmente planteado en los trabajos de Polesana (Polesana et al. 2007) en relacin con haces de Bessel, donde se da una situacin anloga (como se ver en los siguientes captulos). En el ejemplo de la figura 2.8 por qu se forma precisamente el NAB con $a_0 = 4.13$ y no otro?

La figura 2.10 es el resultado de numerosas simulaciones numricas como la de la seccin anterior. En un medio dado, se representa (lneas continuas) el valor del parmetro de amplitud del haz de Airy lineal entrante en $v = 0$, llammosle $a_0(0)$, frente al valor del parmetro caracterstico del NAB estacionario que se alcanza, llammosle $a_0(\infty)$, obtenido a partir de estas simulaciones. La solucin del problema de seleccin se obtiene al representar tambin las amplitudes de las componentes de Hnkel entrante y saliente del NAB final, $|a_{in}(\infty)|$ y $|a_{out}(\infty)|$ (lneas discontinuas). Queda patente en la grfica que la funcin obtenida para la amplitud de la componente entrante es la identidad. Esto es cierto independientemente de los valores de las no linealidades del medio, como el caso $\alpha = 0$ (en verde) como con $\alpha = 1$ (en negro), es decir, $|a_{in}(\infty)| = a_0(0)$. Por otro lado, para el haz de Airy lineal $a_{in}(0) = a_{out}(0) = a_0(0)$, es decir, es una superposicin de dos haces de Hankel entrantes y salientes con iguales amplitudes, como se vio en la seccin 2.4. Llegamos a la importante conclusin de que *la amplitud de la componente de Hnkel entrante del haz se conserva en la propagacin no lineal*, es decir

$$|a_{in}(\infty)| = a_{in}(0) [= a_0(0)], \quad (2.33)$$

y, por tanto, el problema de selección queda resuelto, dado que se puede afirmar que *el NAB al que tiende un haz lineal dado es aquel que tenga una amplitud de la componente de Hänkel entrante igual al valor del parámetro de intensidad a_0 del haz lineal inicial*.

Este hecho se ha comprobado para distintos valores de M y α , y nos permitirá deducir siempre, a partir de una gráfica como la de la figura 2.7 para el medio considerado (α y M), el NAB que se formará dado un haz de Airy inicial con un $a_0(0)$ dado. Esta gráfica se obtiene mediante un análisis numérico de los perfiles transversales de intensidad de los NABs en el medio considerado, como se explicó en la sección 2.4. Así, por ejemplo, en la simulación 2.8 el haz de Airy formado con $a_0(\infty) = 4.13$ posee una componente de Hänkel entrante $|a_{in}(\infty)| = 3.5$, precisamente igual al valor de intensidad $a_0(0)$ del haz de Airy lineal inicial, como puede verificarse en la figura 2.7.

Por otra parte, un tema que queda abierto es si el NAB se forma también en medios con fuerte no linealidad Kerr, para los que $\alpha \gg 1$, dado que se observan fuertes fenómenos de estabilidad en la propagación. En nuestras simulaciones hemos llegado a valores de $\alpha = 3$ y el NAB final sigue formándose, pero más lentamente y por tanto a distancias de propagación cada vez más grandes, de modo que las simulaciones numéricas se hacen cada vez más complicadas y de hecho impracticables. Esto hace que la simulación numérica para el caso de grandes no linealidades Kerr sea muy complicada. En el caso de haces entrantes apodizados, se han realizado varias simulaciones (Couairon et al. 2013) concluyendo que el NAB final podría no ser alcanzado por problemas de inestabilidad. Quedaría por tanto realizar un análisis de estabilidad de los NABs para concretar este punto, a diferencia del caso de los haces de Bessel, cuyos regímenes de propagación, como veremos, ya han sido identificados (Polesana et al. 2008; Couairon et al. 2013; Porras, Ruiz-Jiménez, y Losada 2015).

2.7. Propagación de haces de Airy reales en medios no lineales

Dado que el haz de Airy transporta una potencia infinita, el análisis y resultados anteriores deben considerarse una idealización de lo que ocurre en las situaciones reales. En los experimentos, los haces de Airy que pueden realizarse transportan potencia finita. En esta sección investigamos si los resultados de la sección anterior siguen siendo válidos con estos haces de Airy reales.

El modelo más conocido y usado de haz de Airy lineal con potencia finita es aquel cuya distribución de amplitud inicial es

$$A(\xi, \zeta = 0) = a_0 \text{Ai}(\xi) e^{\gamma \xi}, \quad (2.34)$$

en donde las dos colas del perfil del haz tienden a cero, la positiva por el fuerte decaimiento de la función de Airy y la negativa gracias a la exponencial decreciente introducida en (2.34). En este caso la potencia total transportada por el haz es finita.

Figura 2.11: Propagación de un haz de Airy apodizado con $\gamma = 0.1$. figura adaptada de Opt. Lett. **32**, 980 (Siviloglou y Christodoulides 2007)

La solución de la ecuación de Schrödinger lineal con la condición inicial (2.34) se deriva en el apéndice A, siendo

$$A(\xi, \zeta) = a_0 \text{Ai}(\xi - (\zeta/2)^2 + i\gamma\zeta) \exp[i(\xi\zeta/2 - \zeta^3/12)] \exp[\gamma(\xi - \zeta^2/2 + i\gamma\zeta/2)], \quad (2.35)$$

que representa un haz de Airy lineal con potencia finita o apodizado. En nuestras variables adimensionales y comóviles con el haz (2.13), la condición inicial (2.34) y (2.35) se escriben como

$$\tilde{A}(u, v = 0) = a_0 \text{Ai}(u) e^{\gamma u}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{A}(u, v) = a_0 \text{Ai}(u + i\gamma v) e^{i\phi_L(u, v)} e^{\gamma(u - v^2/4)} e^{i\gamma^2 v/2}. \quad (2.37)$$

Dado que el espectro de frecuencias espaciales de un haz de Airy lineal apodizado es básicamente una exponencial modelada por una fase cúbica (apéndice A), estos haces apodizados se pueden generar imprimiendo una fase cúbica a un haz gaussiano y usando después un sistema transformador de Fourier $2 - f$ (Lotti et al. 2011). En la figura 2.2 se muestra en escala de colores la intensidad de un haz de Airy apodizado. Como el ideal, sigue una trayectoria parabólica, pero es solo casi no difractante, formándose gradualmente desde detrás de la lente hasta su foco (en $v = 0$), y difractándose lentamente después.

En lo que sigue, el haz de Airy con potencia finita o apodizado en (2.37) es el que se introduce en el medio no lineal. Como ahora el haz no presenta propagación estacionaria o no difractante, sino que se forma gradualmente hasta el foco, la propagación en el medio no lineal puede depender de la posición precisa en la que entra en el medio no lineal. Diferenciamos, como se hace en los experimentos (Polesana et al. 2007), dos modos de introducción del haz de Airy en el medio. Primero, la llamada introducción “abrupta”, es decir, cuando el haz de Airy está totalmente formado, situando la entrada del medio no lineal en el foco de la lente. La segunda, la llamada introducción “suave”, situando la entrada en el medio inmediatamente después de la lente o poco después, con lo que el perfil

Figura 2.12: Introducción abrupta y suave en el medio. En la introducción abrupta (arriba) el plano de entrada en el medio se ubica en el foco de la lente y en la suave (abajo), inmediatamente después de esta o poco después, de modo que la intensidad es baja.

transversal presenta niveles muy bajos de intensidad al no haberse formado completamente el haz de Airy, siendo la propagación en el medio inicialmente lineal. Ambas disposiciones experimentales están esquematizadas en la figura 2.12.

Figura 2.13: Introducción abrupta en $v = 0$. Perfiles transversales de intensidad según aumenta la distancia de propagación, v , del haz de Airy real (en negro) (2.37) con $a_0 = 3.5$, apodizado con $\gamma = 0.0025$, hacia el NAB atractor de la dinámica (en rojo) con $a_0 = 4.13$, cuya amplitud de la componente entrante de Hänkel es $|a_{in}| = 3.5$, para un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$.

Figura 2.13 (cont.): Continuación de la figura anterior, perfiles transversales de intensidad en estadios de propagación cada vez más avanzados, en donde se observa, después de una zona de fuertes pérdidas, cómo el NAB atractor no es alcanzado por el haz de Airy introducido en el medio, y el ulterior decaimiento de la intensidad debido a la falta de reservorio de potencia.

2.7.1. Introducción abrupta

En la introducción abrupta la intensidad de la onda es máxima a la entrada del medio y por tanto los efectos no lineales son inicialmente muy fuertes. En el ejemplo de la figura

Figura 2.14: Introducción abrupta, (a) pérdidas no lineales de potencia y (b) intensidad pico frente a la distancia de propagación del haz de Airy con $a_0 = 3.5$ en un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$.

2.13 el medio es el mismo que en la figura 2.8 ($\alpha = 1$ y $M = 5$) y el haz que entra en el medio en $v = 0$ es el mismo haz de Airy ($a_0 = 3.5$), es decir, (2.36) con $\gamma = 0.0025$, siendo $v = 0$ el foco de la lente. Se observa que a distancias de propagación pequeñas dentro del medio, la evolución del perfil de intensidad del haz de Airy apodizado inicial (curvas negras) es parecida al caso ideal, siendo fuertemente absorbido inicialmente y tendiendo al mismo haz de Airy no lineal (curvas rojas) encontrado en la sección 2.5, es decir, el que conserva la amplitud de la componente entrante de Hänkel. Al cabo de cierta distancia de propagación, sin embargo, el haz pierde energía y se disipa gradualmente, debido al hecho de que en este caso el reservorio de potencia que en el caso ideal iba rellenando las pérdidas ahora es limitado.

En las figuras 2.14 (a) y (b) se observan las evoluciones de las pérdidas no lineales de potencia en todo el perfil transversal y la intensidad pico a lo largo de la propagación no lineal, para los casos ideal $\gamma = 0$, y con dos niveles de apodización, $\gamma = 0.0025$ y $\gamma = 0.0075$. El caso ideal sería aquel que acaba alcanzando el NAB atractor, tal como vimos en la sección 2.5. En cuanto a las pérdidas, se aprecia en la figura 2.14 (a) un comportamiento análogo al del caso ideal al inicio de la propagación, no pudiéndose estabilizar en el valor constante del caso inicial y tendiendo a cero al final. La tendencia al NAB atractor como en el caso ideal la apreciamos en todas las simulaciones numéricas que hemos elaborado, siendo patente en la figura 2.14 (b) de evolución de la intensidad pico, en donde se ve que esta tendencia se mantiene durante más distancia cuanto menor sea la apodización, coincidiendo a distancias pequeñas independientemente de cuál sea esta. En cualquier caso, podemos afirmar que el NAB que conserva la amplitud de la componente entrante de Hänkel, el mismo que en el caso ideal, sigue actuando como atractor, pero no llega a formarse debido al consumo de la potencia finita acumulada en el reservorio del haz de Airy apodizado.

Figura 2.15: Introducción suave en $v = -50$ de un haz de Airy apodizado (2.37) con $a_0 = 3.5$ y $\gamma = 0.0025$, en un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$. En negro se representan los perfiles transversales de intensidad a distancias crecientes de propagación, v , tendiendo hacia el correspondiente NAB atractor (en rojo).

Figura 2.15 (cont.): Continuación de la figura anterior de distintos perfiles transversales de intensidad (en negro) a distancias crecientes de propagación, v . Alrededor del foco ($v = 0$) se forma el NAB atractor de la dinámica (en rojo), hasta su ulterior decaimiento debido a la falta de reservorio.

2.7.2. Introducción suave

La idea de introducción “suave” fue introducida por primera vez en relación con haces de Bessel no lineales (Polesana et al. 2007), habiéndose verificado que previene el desarrollo de inestabilidades asociadas a la no linealidad Kerr. Aquí aplicamos la misma idea a los haces de Airy, mostrando que esta configuración es mucho más favorable a la formación del haz de Airy no lineal atractor. En las figuras 2.15 y 2.16 se ilustra la evolución del mismo haz de Airy anterior en el caso de que la entrada al medio esté situada cerca de la lente, suficientemente antes del foco ($v \ll 0$), de forma que se verifique la condición de entrada suave (lineal) en el medio ($|\tilde{A}|^2 \ll 1$). De esta forma las pérdidas no lineales y el efecto Kerr en el inicio de la propagación son despreciables. Lo que observamos en las figuras 2.15 y en todas las simulaciones realizadas es que en el caso de la introducción suave en el medio el NAB caracterizado por tener una amplitud componente entrante de Hänkel, $|a_{\text{in}}|$ igual a la amplitud a_0 del haz de Airy que se formaría en el foco ($v = 0$), sigue actuando como atractor de la dinámica, y que en estas condiciones de entrada suave, sí llega a formarse en una región más o menos larga alrededor del foco, dependiendo del grado de apodización. Concretamente, en las gráficas de 2.15 correspondientes a las

Figura 2.16: Para distintos valores del parámetro γ , para el mismo haz inicial y el mismo medio no lineal de la simulación de la propagación de la figura 2.15: (a) pérdidas no lineales frente a la distancia de propagación, (b) intensidad pico frente a la distancia de propagación. Las líneas discontinuas representan la propagación lineal y las horizontales representan las pérdidas no lineales de potencia del NAB atractor y su intensidad pico.

cercanías del foco, $v \sim 0$, se observa cómo el haz de Airy lineal que se formaría en el foco si la propagación fuese lineal, se convierte en el NAB con $a_0 = 4.13$, cuya amplitud de la componente entrante es en efecto $|a_{\text{in}}| = 3.5$.

En las figuras 2.16 (a) y (b) se ven de nuevo las pérdidas no lineales de potencia y la intensidad pico y se comprueba que carecen de las ondulaciones que tenía el caso de introducción abrupta. Como se puede apreciar, alrededor de $v = 0$, a diferencia del caso de introducción abrupta, las pérdidas y la intensidad pico alcanzan de un modo suave los valores correspondientes al NAB atractor.

Para acabar con el estudio de la dinámica de los haces de Airy en un medio no lineal nos propusimos averiguar cuál era el comportamiento en el límite de altas intensidades, cuando el NAB atractor está cerca del $a_{0,\text{max}}$ a partir del cual se ha comprobado que no existen estados estacionarios (sección 2.2). Recordemos en este sentido que estos haces límite, LNABs, no disponían de colas de Hänkel. Como la apodización en efecto no va a permitir al haz proveerse de estas colas, se puede pensar que en el límite de altas intensidades podemos alcanzar el LNAB atractor con total coincidencia a lo largo de una región transversal hasta un $u < 0$ que dependerá de la apodización empleada. En efecto así ocurre.

En las figuras 2.17 (a) y (b) se representan los perfiles transversales del LNAB y de un haz de $a_0 = 7$ en incidencia suave sobre un medio no lineal con MPA $M = 5$ y Kerr $\alpha = 1$, así como su evolución longitudinal desde $v = -75$. Comparando la figura 2.16 (b) con la 2.17 (b) se aprecia que el alcance del régimen estacionario en el caso de altas intensidades se mantiene durante una región mayor que para intensidades menores.

De este modo, tanto para la tendencia a intensidades menores hacia el NAB como para trabajos con intensidades límite hacia el LNAB se ve que la persistencia en el estado

Figura 2.17: Alcance del LNAB en incidencia suave desde $v = -75$. Para un medio con $M = 5$ y $\alpha = 1$, (a) perfil de intensidad en el foco ($v = 0$) correspondiente a un haz incidente con $a_0 = 7$ y $\gamma = 0.0025$ en negro y el perfil correspondiente al LNAB en rojo. (b) Evolución de la intensidad pico con la distancia de propagación para $\gamma = 0.0025$ en gris y $\gamma = 0.0075$ en negro. Las líneas discontinuas representan la propagación lineal y las horizontales las correspondientes al LNAB estacionario.

estacionario en la propagación no solo es mayor cuanto menor sea el grado de apodización sino también cuanto mayor sea el parámetro de intensidad incidente a_0 . Como para ambos casos se ve en las figuras 2.16 (b) y 2.17 (b) que este pico de intensidad ronda la unidad, se puede poner $1 \sim 0.287a_0^2 \exp(-\gamma v^2/2)$ y estimar la distancia en la cual se va a poder mantener el régimen estacionario como

$$\Delta v \sim 2\sqrt{\frac{2 \ln(0.287a_0^2)}{\gamma}}, \quad (2.38)$$

suponiendo lógicamente que $0.287a_0^2 > 1$ en esta meseta. Este hecho en teoría garantiza la posibilidad de conseguir regímenes cuasi-estacionarios tan prolongados como queramos incluso en el trabajo con haces de potencia finita.

2.8. Efectos de restauración

La ley de conservación de la componente de Hankel entrante, además de la explicada predicción de los estados estacionarios finales a los que tiende la onda lineal introducida en el medio no lineal, tiene otras consecuencias. Una de ellas es la capacidad de auto-restauración (*self-healing*) de un haz de Airy lineal que entra un medio con absorpcion no lineal y vuelve al medio lineal inicial (Kolesik y Moloney 2004).

En efecto, si aplicamos la ley de conservación también a la salida del medio, y limitándonos al caso ideal (no apodizado) por sencillez, el haz de Airy que tiende a formarse detrás del medio no lineal, tendrá una amplitud de la componente entrante igual a $|a_{in}|$ en el medio, que a su vez es igual a a_0 del haz de Airy lineal que entr, y en definitiva, el haz de Airy antes del medio no lineal tiende a reconstruirse, como si la absorpcion no hubiese existido, volviendo al medio, por decirlo así, invisible.

En las figuras 2.18 se muestra un ejemplo de este interesante efecto. Hacemos incidir en este caso un haz de Airy ideal con $a_0 = 2$ sobre un medio no lineal sin Kerr ($\alpha = 0$),

Figura 2.18: Restauración de la onda. Un haz de Airy lineal con $a_0 = 2$ incide en un medio no lineal con $M = 5$ y $\alpha = 0$ en $v = 0$ y sale en $v = 10$. En (a) perfiles transversales de intensidad en distintos momentos de la absorción de la onda cuando entra en el medio y es recompuesta al salir de él.

Figura 2.18 (cont.): Continuación de la recomposición del haz. A una distancia de $v = 25$ el perfil transversal de intensidad adquiere la misma forma que tenía cuando se encontró el obstáculo, que ha resultado ser transparente para el haz.

por sencillez, pero con una MPA de 5 fotones, $M = 5$, situado entre los valores de la distancia de propagación de $v = 0$ y $v = 10$. Al penetrar el haz en el medio tiende a transformarse en el NAB atractor estudiado. Sin embargo, en este caso el medio, de anchura finita, acaba, y el haz sale de él en $v = 10$, recuperando su perfil inicial. Las figuras 2.18 muestran distintos perfiles transversales de intensidad antes, durante y después de la salida del medio en donde se aprecia el alcance del NAB de la onda después de ser absorbida ($v \sim 9$), y la progresiva recuperación del perfil inicial a partir de $v = 10$. Este hecho se manifiesta también en la evolución de la intensidad pico con la coordenada de propagación en la figura 2.19.

Este efecto es debido precisamente a la conservación de la componente de Hänkel entrante. En este caso lo que se observa físicamente sería una especie de sistema reversible disipativo. Esta aparente paradoja física se explica en principio por la cantidad infinita de potencia que porta un Airy ideal en su reservorio, pero para los haces apodizados de potencia finita también se podría simular este comportamiento ajustando el factor de apodización siempre y cuando las dimensiones del medio interpuesto no fueran comparables con el decaimiento exponencial.

Figura 2.19: Intensidad pico frente a coordenada de propagación correspondiente a la simulación de la figura 2.18. Las líneas verticales discontinuas marcan la entrada y la salida del medio.

2.9. Conclusión

En este capítulo se ha analizado la propagación de haces de Airy lineales en medios Kerr con absorción no lineal identificando el haz de Airy no lineal atractor de la dinámica. Se ha visto que este haz atractor es uno de los haces de Airy no lineales no difractantes soluciones estacionarias de la NSE descritos recientemente (Lotti et al. 2011). Se han descrito los parámetros característicos de los haces de Airy lineales y no lineales mediante el estudio del comportamiento asintótico. A partir de este estudio, se ha encontrado que la amplitud de la componente de Hänkel entrante, que da cuenta del flujo de potencia que se forma desde el exterior de los haces hasta sus lóbulos principales, se conserva en la propagación no lineal del haz de Airy lineal inicial, siendo la misma que la que posee el haz de Airy no lineal atractor final (Ruiz-Jiménez, Nóbrega, y Porras 2015). El estudio de esta ley de conservación se ha realizado tanto en el caso del haz de Airy lineal inicial ideal, que posee potencia infinita, como en el caso de los haces de Airy lineales iniciales reales o apodizados, cuyas características son similares a los haces de Airy que se pueden generar en un laboratorio. En ambos casos se ha comprobado, mediante simulaciones numéricas masivas, la veracidad de la ley de conservación encontrada. La identificación de este haz no lineal que se forma espontáneamente en la propagación de los haces de Airy lineales en medios Kerr con absorción no lineal es de vital importancia para muchas aplicaciones experimentales.

PROPAGACIÓN DE HACES DE BESSEL IDEALES CON VÓRTICE EN MEDIOS KERR CON ABSORCIÓN NO LINEAL

En este capítulo se estudia la dinámica de los haces de Bessel lineales ideales con y sin vórtice en medios Kerr con absorción no lineal. En primer lugar, se repasa el haz de Bessel lineal de cualquier orden, haciendo hincapié en el transporte de momento angular que se da en aquellos que poseen vórtice. Se describen a continuación los haces de Bessel no lineales, de los cuales se conocía hasta hoy solo el fundamental o sin vórtice (Porras et al. 2004), y presentando por primera vez el haz no lineal de orden superior no difractante en un medio Kerr con absorción no lineal (Porras y Ruiz-Jiménez 2014). En el análisis numérico de la propagación de los haces de Bessel lineales introducidos en el medio no lineal, se identifica el haz atractor de la dinámica como uno de estos nuevos haces de Bessel no lineales con vórtice descubiertos. Se encuentra de nuevo una ley de conservación con la que se puede predecir, dados los parámetros del haz de Bessel lineal introducido en el medio, el haz de Bessel no lineal que se formará en el transcurso de su propagación. Por la mayor complejidad del problema en comparación con los haces de Airy, posponemos el análisis de los haces de Bessel reales con potencia finita al capítulo 4.

3.1. El haz de Bessel

En los años ochenta salieron a la luz los haces de Bessel como soluciones de la ecuación de ondas (Durnin, Miceli, y Eberly 1987) que representan haces de luz libres de difracción, lo que supuso el primer hallazgo de haces no difractantes después de la predicción de Berry sobre los haces no difractantes de Airy en el contexto de la Mecánica Cuántica en $(1+1)D$. Su trabajo suponía $(2+1)D$, es decir, una dimensión longitudinal de propagación y dos dimensiones transversales, teniendo el perfil transversal de intensidad del haz de Bessel simetría de revolución en torno al eje de propagación z y por tanto dependiendo solo de $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. El perfil radial de amplitud del haz es en efecto una función de Bessel de primera especie, $J_l(x)$, en donde el subíndice l representa el orden de la misma, que en nuestro caso será el vórtice o carga topológica del haz (véase apéndice F). En las figuras 3.1 se representa el perfil del módulo al cuadrado de las funciones de Bessel para $l = 0$ y

Figura 3.1: Perfiles de los módulos al cuadrado de dos funciones de Bessel de primera especie con (a) $l = 0$ y (b) $l = 1$.

$l = 1$. El trabajo original de Durnin se basó en el haz de Bessel sin vórtice, pero pronto se describieron los haces de Bessel lineales no difractantes de orden superior (Allen, Padgett, y Babiker 1999; Volke-Sepulveda et al. 2002).

3.1.1. El haz de Bessel como onda cónica

El haz de Bessel se puede crear idealmente por medio de una lente con superficie cónica, llamada axicón, como se muestra en la figura 3.2. Si incide por la izquierda una onda plana propagándose según z , el axicón crea ondas planas inclinadas un ángulo fijo θ , llamado ángulo cónico, y todos los ángulos azimutales ϕ entre 0 y 2π , es decir con vector de propagación de componentes

$$\begin{aligned} k_x &= k_0 \sin \theta \cos \phi, \\ k_y &= k_0 \sin \theta \sin \phi, \\ k_z &= k_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

que en la aproximación paraxial $\theta \ll 1$ se pueden aproximar a

$$\begin{aligned} k_x &= k_0 \theta \cos \phi, \\ k_y &= k_0 \theta \sin \phi, \\ k_z &= k_0 (1 - \theta^2/2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

De este modo, si escribimos también $\vec{r} = (x, y, z) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z)$, estas ondas planas son $E_\phi = A_\phi \exp(ik_0 z - \omega_0 t)$, donde

$$A_\phi = e^{i[k_0 \theta r (\cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha)]} e^{-i \frac{k_0 \theta^2}{2} z} = e^{i[k_0 \theta r \cos(\phi - \alpha)]} e^{-i \frac{k_0 \theta^2}{2} z}, \quad (3.3)$$

y teniendo en cuenta la fórmula integral de Bessel (Olver 2010)

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} d\phi, \quad (3.4)$$

se pueden sumar las contribuciones de las ondas planas con todos los ángulos azimutales, obteniendo $E = A(r, z) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)]$, siendo la envolvente compleja lentamente variable (si θ es paraxial)

$$A(r, z) = \int_0^{2\pi} e^{i[k_0 \theta r \cos(\phi - \alpha)]} d\phi e^{-i \frac{k_0 \theta^2}{2} z} = J_0(k_0 \theta r) e^{-i \frac{k_0 \theta^2}{2} z}, \quad (3.5)$$

Figura 3.2: Esquema de funcionamiento del axicón.

que constituye el haz de Bessel lineal (*Bessel beam*, BB) fundamental. Como se ve, un BB es una superposición de ondas planas cuyos vectores de onda yacen uniformemente distribuidos en la superficie de un cono de ángulo θ . Se trata de un haz lineal no difractante dado que su intensidad $I = |A|^2 = |J_0(k_0 \theta r)|^2$ no depende de z . Hay que señalar que el BB original introducido por Durnin et al. es de la forma $E = J_0(k_0 \sin \theta r) \exp(i k_0 \cos \theta z - \omega_0 t)$, con el que puede obtenerse (3.5) suponiendo $\theta \ll 1$. Es importante señalar también que la amplitud del BB decae radialmente como $r^{-1/2}$, lo cual implica que la potencia total que transportan es infinita,

$$P = 2\pi \int_0^\infty dr r |A(r, z)|^2 = \infty. \quad (3.6)$$

Puede verificarse que el BB (3.5) así construido es solución de la LSE (1.17), que en coordenadas cilíndricas se escribe

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} \right). \quad (3.7)$$

Si introducimos el nuevo parámetro

$$\delta \equiv -\frac{k_0 \theta^2}{2}, \quad (3.8)$$

y un factor constante que determina la intensidad, el BB fundamental se puede escribir como

$$A(r, z) = \sqrt{I_0} J_0(\sqrt{2k_0|\delta|r}) e^{i\delta z}. \quad (3.9)$$

El hecho de que $\delta < 0$ en estos haces indica que se produce un acortamiento efectivo del vector de onda a lo largo de la dirección axial, dada la estructura cónica del haz, estando la constante efectiva de propagación en la dirección axial dada por

$$k_{\text{ef}} = k_0 + \delta, \quad (3.10)$$

lo que dota a estos haces cónicos de una velocidad de fase $v_f = \omega_0/k_{\text{ef}}$ superlumínica (Giovannini et al. 2015).

En los cálculos anteriores se ha ignorado que el axicón tiene una apertura finita. Los haces de Bessel reales generados por un axicón de radio R e iluminados por un haz plano muy expandido tienen potencia finita. Dada la geometría cónica de la figura 3.2, la superposición cónica de ondas, y por tanto el BB, solo subsiste una distancia

$$L_B = \frac{R}{\tan \theta} \simeq \frac{R}{\theta}, \quad (3.11)$$

llamada longitud de la zona de Bessel, que, no obstante, se puede idealmente hacer tan grande como uno quiera sin más que aumentar R o disminuir θ .

Los haces de Bessel son producidos hoy en día rutinariamente en los laboratorios, y se utilizan como pinzas ópticas, para atrapamiento de partículas (Sokolovskii et al. 2014), y en general para muchas aplicaciones de micromanipulación óptica (Arlt et al. 2001).

3.1.2. Haces de Bessel con vórtice

El reciente interés sobre los haces de luz dotados con momento angular orbital ha abierto nuevas perspectivas en aplicaciones como el intercambio del momento angular de la luz con la materia, en especial en relación a nanopartículas, condensados de Bose-Einstein o la interacción con los átomos (Masalov 1997; Allen, Padgett, y Babiker 1999; Tabosa y Petrov 1999). Aunque en un principio los estudios de haces con momento angular orbital se centraron en los haces de tipo Laguerre-Gauss (Allen et al. 1992), parece ser dominante en nuestros días el interés por los haces de Bessel o de Durnin libres de difracción, pero de orden superior, o con vórtice o momento angular (Volke-Sepulveda et al. 2002), dados, en la aproximación paraxial, por la expresión

$$A(r, \phi, z) = \sqrt{I_0} J_l(\sqrt{2k_0|\delta|r}) e^{i\delta z} e^{il\phi} \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.12)$$

en donde l es la llamada carga topológica del haz, relacionada, como veremos después, con el momento angular orbital que transporta el haz, y donde, como antes, $\delta = -k_0\theta^2/2$, siendo θ el ángulo cónico. Es fácil verificar que la expresión (3.12) satisface la LSE (3.7). Como el BB sin vórtice o fundamental, se trata de haces no difractantes que transportan, idealmente, potencia infinita. Estos haces presentan frentes de onda de forma helicoidal, dados por la expresión $k_0z + \delta z + l\phi = \text{cte}$, como se aprecia en la figura 3.3 (a), y son generados experimentalmente con un axicón de la misma forma que los anteriores, con la particularidad de que el haz que ilumina el axicón ya lleva un vórtice en el centro. El vórtice en sí mismo consiste en una singularidad en la fase. Alrededor del vórtice en $r = 0$, la fase varía entre 0 y 2π tantas veces como indique la carga topológica l . En $r = 0$, el

Figura 3.3: (a) Frentes de onda helicoidales para distintos valores de la carga topológica l . (b) Arriba, holograma generador de vórtices con el típico “tenedor” en su centro. Abajo, placa de fase generadora de frente helicoidal.

centro del vórtice, la amplitud debe ser necesariamente nula, pues si no, el campo eléctrico sería multivaluado. Como se demuestra en el apéndice F, para una carga topológica l , A debe comportarse como $A \propto r^l$ en las proximidades del vórtice. El vórtice se consigue con dispositivos holográficos (Heckenberg et al. 1992) que imprimen las adecuadas diferencias de fase al haz inicial por medio de redes de difracción con dislocaciones, o bien por medio de láminas de fase transparentes cuyo grosor se incrementa con el ángulo azimutal (Beijersbergen et al. 1994). Un esquema de los dos dispositivos aparece en la figura 3.3 (b).

Por otra parte, al igual que ocurría con los haces de Airy, los haces de Bessel lineales se pueden expresar como (Olver 2010)

$$A(r, \phi, z) = \frac{\sqrt{I_0}}{2} \left[H_l^{(1)}(\sqrt{2|\delta|k_0}r) + H_l^{(2)}(\sqrt{2|\delta|k_0}r) \right] e^{i\delta z} e^{il\phi}, \quad (3.13)$$

donde $H_l^{(1,2)}$ son las funciones de Hänkel de orden l y clases 1 y 2. El primer término representa un haz de Hänkel que transporta potencia espiralmente hacia el exterior y el segundo el haz de Hänkel que transporta potencia hacia el vórtice en igual cantidad.

3.2. Haces de Bessel no lineales estacionarios

Motivados por la existencia de haces de Airy no lineales como soluciones estacionarias de la NSE en un medio Kerr con absorción no lineal, investigamos si una situación análoga puede darse con los haces de tipo Bessel, es decir, si puede existir el haz de Bessel no lineal (*Nonlinear Bessel beam*, NBB). Para ello se buscan soluciones de la ecuación (1.49) de la forma

$$A(r, \phi, z) = a(r) e^{i\psi(r)} e^{il\phi} e^{i\delta z}, \quad (3.14)$$

en donde $\psi(r)$ es el perfil radial de fase a determinar, al igual que hacíamos en el caso del haz de Airy, y $a(r)$ el perfil radial de amplitud, también a determinar. La constante δ se supone en principio arbitraria (no necesariamente negativa). El carácter no difractante del haz se impone en que su amplitud no depende de la coordenada de propagación z . En el caso no lineal, dada la necesidad de numerosos cálculos y simulaciones numéricas, es conveniente trabajar en las variables adimensionales

$$\rho \equiv \sqrt{2k_0|\delta|} r, \quad \zeta \equiv |\delta| z \quad \text{y} \quad A \equiv \left(\frac{2|\delta|}{\beta^{(M)}} \right)^{\frac{1}{2M-2}} \tilde{A}, \quad (3.15)$$

consiguiendo una NSE (1.49) más compacta, con la forma

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \zeta} = i\Delta_{\perp} \tilde{A} + i\tilde{f}(|\tilde{A}|^2) \tilde{A} - |\tilde{A}|^{2M-2} \tilde{A}, \quad (3.16)$$

en donde ahora el laplaciano transversal será $\Delta_{\perp} \equiv \partial_{\rho}^2 + (1/\rho)\partial_{\rho} + (1/\rho^2)\partial_{\phi}^2$, y $\tilde{f}(u) \equiv \alpha_2 u + \alpha_4 u^2$ con

$$\alpha_j \equiv \frac{1}{|\delta|} \frac{k_0 n_j}{n_0} \left(\frac{2|\delta|}{\beta^{(M)}} \right)^{\frac{j}{2M-2}}. \quad (3.17)$$

Como se puede ver, se ha introducido también un término cuántico que simula una saturación en la no linealidad Kerr. Esto es debido, por un lado a que la intensidad puede ser muy alta, y por otro a que en el problema de la existencia de estados estacionarios no lineales, localizados y con vórtice, los llamados *vortex solitons*, o solitones con vórtice, la saturación Kerr ha jugado tradicionalmente un papel importante, siendo así contemplado en la mayoría de las publicaciones.

En estas variables adimensionales, el BB lineal, solución de (3.16) sin términos no lineales, se escribe como $b_0 J_l(\rho) \exp(il\phi) \exp(-i\zeta)$, ya que en este caso $\delta < 0$, donde b_0 determina su amplitud, y la función prueba (3.14) como

$$\tilde{A}(\rho, \phi, \zeta) = \tilde{a}(\rho) e^{i\psi(\rho)} e^{il\phi} e^{i \operatorname{sgn}(\delta) \zeta}, \quad (3.18)$$

donde $\operatorname{sgn}(\delta)$ representa el signo de δ . Sustituyendo en (3.16) y separando partes real e imaginaria obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para la amplitud y la fase:

$$\frac{d^2 \tilde{a}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{a}}{d\rho} - \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \tilde{a} + \tilde{f}(\tilde{a}^2) \tilde{a} - \operatorname{sgn}(\delta) \tilde{a} - \frac{l^2}{\rho^2} \tilde{a} = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + 2 \frac{d\psi}{d\rho} \frac{d\tilde{a}}{d\rho} \frac{1}{\tilde{a}} + \tilde{a}^{2M-2} = 0. \quad (3.20)$$

El haz debe cumplir la condición de contorno de localización, es decir, $\tilde{a}(\rho) \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$. Además, en el vórtice la amplitud es muy pequeña y por tanto los efectos no lineales despreciables, es decir, en el origen se debe verificar la segunda condición de contorno $a(\rho) \simeq b_0 J_l(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow 0$, o, dicho de otro modo, que el haz se comporte como el BB con vórtice de cierta amplitud b_0 . Puesto que $J_l(\rho) \simeq \rho^l / (2^l l!)$ cuando $\rho \rightarrow 0$, también podemos escribir

$$\tilde{a}(\rho) \simeq \frac{b_0}{2^l l!} \rho^{l|} \text{ cuando } \rho \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Figura 3.4: Valores de $b_{0,max}$ de NBBs para distintos valores de la carga topológica l en medios con diferente M y (a) $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ y (b) $\alpha_2 = 0,5$ y $\alpha_4 = -0,25$.

En el apéndice E se da la explicación del cálculo numérico desarrollado en MATLAB para obtener estas soluciones.

Es importante recordar que en ausencia de absorción, este problema tiene solución con $\text{sgn}(\delta) = 1$ para un espectro discreto de valores de b_0 , que constituyen los llamados solitones con vórtice (*vortex solitons*) (Desyatnikov, Kivshar, y Torner 2005) fuertemente localizados transversalmente, y con $\text{sgn}(\delta) = -1$ para todo b_0 , que son haces de tipo Bessel no lineal¹. Cuando la absorción es incluida, no existe solución con $\text{sgn}(\delta) = +1$, es decir, no pueden existir solitones con vórtice en un medio con absorción no lineal (Silberberg 1990b). En cambio, con $\text{sgn}(\delta) = -1$, se encuentra numéricamente que siguen existiendo soluciones a este problema con un espectro continuo de valores de b_0 hasta un valor máximo $b_{0,max}$, y que constituyen los haces de Bessel no lineales en el medio Kerr resistentes a la absorción no lineal. Estos haces fueron descubiertos, para el caso sin vórtice, en 2004 (Porrás et al. 2004), y aquí demostramos la existencia también del NBB no difractante con vórtice (Porrás y Ruiz-Jiménez 2014).

Existen por tanto haces de Bessel no lineales de orden superior en medios Kerr que se propagan sin difracción resistiendo la absorción no lineal, siempre que el parámetro de amplitud del haz esté en el rango $b_0 \in (0, b_{0,max}]$, donde $b_{0,max}$ dependerá de l, M y el efecto Kerr determinado por α_2 y α_4 . Estos haces se dan incluso contemplando solamente la absorción no lineal, es decir, suponiendo medios en donde el efecto Kerr no es importante ($\alpha_j = 0$). En las figuras 3.4 se muestran los resultados del cálculo numérico realizado para obtener $b_{0,max}$ en función del número de fotones M que absorbe cada material, en un medio sin no linealidad Kerr apreciable (que se estudia como referencia) y en un medio con Kerr.

En la figura 3.5 se muestran ejemplos de perfiles radiales de intensidad, $\tilde{a}^2(\rho)$, en líneas continuas, de NBBs con carga topológica $l = 2$, en un medio con no linealidad Kerr

¹En este caso sin absorción sólo se suele trabajar con la ecuación para la amplitud (3.19), debido a que una fase constante $\psi = \text{cte}$ cumpliría (3.20) (Desyatnikov, Kivshar, y Torner 2005).

Figura 3.5: Perfiles radiales de intensidad de NBBs con $l = 2$ en un medio con $M = 4$ en el caso de un medio sin Kerr y con (a) $b_0 = 1.7$, (b) $b_0 = 1.82$ y (c) $b_0 = 1.896$ y en el caso de un medio con Kerr saturable con $\alpha_2 = 0.5, \alpha_4 = -0.25$ y con (d) $b_0 = 1.8$, (e) $b_0 = 2.15$ y (f) $b_0 = 2.237$. Por comparación se muestran en líneas discontinúas los BBs lineales con el mismo comportamiento en el origen.

despreciable y en otro con ella, ambos con $M = 4$. Por comparación, en líneas discontinúas se muestra el BB lineal de la misma carga topológica, con el mismo parámetro de amplitud en el origen (misma b_0). Para bajas intensidades el perfil transversal se parece al lineal, y cuando la intensidad va aumentando hasta su valor máximo $b_{0,\max}$, los anillos pierden contraste y se estrechan en el medio con autofocalización (se ensancharían en un medio desfocalizante). En todo caso, los NBBs muestran un perfil radial débilmente localizado, decayendo en amplitud como $1/r^{1/2}$, como los haces de Bessel lineales. Por ello la potencia que transportan es también infinita.

3.2.1. Mecanismo de estacionariedad

Para estudiar el mecanismo por el cual estas ondas muestran una propagación estacionaria pese a la absorción hay que darse cuenta de que la ecuación (3.20) es equivalente a

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\psi}{d\rho} \tilde{a}^2 \right) + \rho \tilde{a}^{2M} = 0, \quad (3.22)$$

a partir de la cual, integrando, se deduce la ecuación de continuidad

$$-2\pi\rho\frac{d\psi}{d\rho}\tilde{a}^2 = 2\pi\int_0^\rho d\rho\rho\tilde{a}^{2M}, \quad (3.23)$$

que se puede leer como $-F(\rho) = N(\rho)$, es decir, las pérdidas no lineales de potencia sufridas en un círculo de radio ρ , $N(\rho)$, son repuestas por un flujo de potencia a través de la circunferencia del círculo, $F(\rho)$, como ya fue descrito en 2004 para los haces sin vórtice (Porrás et al. 2004). Por supuesto, este flujo permanente que repone las pérdidas de potencia solo es posible en una haz que tiene potencia infinita, o lo que es lo mismo, un reservorio. En el caso en el que no se tenga en cuenta el término de absorción no lineal ($\beta^{(M)} = 0$) los frentes de fase son planos ($d\psi/d\rho = 0$) y no habrá flujo radial de potencia.

Para los haces con vórtice es conveniente hacer un análisis más detallado. Escribiendo la envolvente compleja en términos de su amplitud y su fase, $\tilde{A} = \tilde{a} \exp(i\Psi)$, la NSE (3.16) devuelve la ecuación de continuidad, para la intensidad de un haz en el plano transversal,

$$(1/2)\partial_\zeta\tilde{a}^2 = -\nabla_\perp\vec{j} - \tilde{a}^{2M}, \quad (3.24)$$

en donde la corriente transversal de intensidad está dada por $\vec{j} = \tilde{a}^2\nabla_\perp\Psi$. En el caso de propagación estacionaria, se obtiene

$$\nabla_\perp\vec{j} = -\tilde{a}^{2M}, \quad (3.25)$$

que expresa, de forma diferencial, que las pérdidas de potencia en cualquier región del plano transversal son repuestas por una corriente entrante por el contorno de dicha región. En el caso particular de haces estacionarios de simetría de revolución en intensidad $\tilde{a}^2(\rho)$ y fase $\Psi = \psi(\rho) + l\phi + \text{sgn}(\delta)\zeta$, como los NBBs, tendremos una corriente dada, más explícitamente, por

$$\vec{j} = \tilde{a}^2\left(\frac{d\psi}{d\rho}\vec{u}_\rho + \frac{l}{\rho}\vec{u}_\phi\right), \quad (3.26)$$

de forma que podemos recuperar la ecuación (3.23) sin más que integrar (3.25) en un círculo de radio ρ .

En la figura 3.6 se muestran, por comparación, los distintos comportamientos de la intensidad, la fase y la corriente de intensidad en los casos del BB lineal con vórtice, el NBB fundamental y el NBB con vórtice. En el caso del BB lineal, en medios transparentes, la corriente de intensidad en el plano transversal es puramente azimutal, $\vec{j} = (\tilde{a}^2 l / \rho)\vec{u}_\phi$, y está asociada al momento angular del haz. En el caso del NBB sin vórtice en un medio con absorción no lineal, en cambio, la corriente es puramente radial, $\vec{j} = (\tilde{a}^2 d\psi/d\rho)\vec{u}_\rho$, dirigiéndose desde el reservorio hacia el centro del haz, donde repone las pérdidas de intensidad debidas a la absorción no lineal. En el NBB con vórtice, la corriente de intensidad posee las dos componentes anteriores, de forma que la corriente se mueve desde el reservorio describiendo una espiral hacia los anillos interiores en donde las pérdidas no lineales son más abundantes.

De este modo, al igual que en el caso del flujo de intensidad, también existe un flujo de momento angular orbital respecto del eje z y un intercambio de éste con el medio. En la

Figura 3.6: Perfiles de intensidad (primera fila), de fase (segunda fila) y corrientes de intensidad (tercera fila) del BB con $l = 1$ y $b_0 = 1.666$ (primera columna); del NBB con $l = 0$, $M = 4$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ y $b_0 = 1.174$ (segunda columna); y del NBB con $l = 1$, $M = 4$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ y $b_0 = 1.666$ (tercera columna). (En las gráficas se utilizan coordenadas cartesianas normalizadas $\xi = \sqrt{2k|\delta|x}$ y $\eta = \sqrt{2k|\delta|y}$ para el plano trasnversal).

aproximación escalar, la componente axial del momento angular del campo eléctrico está repartida en el espacio con una densidad $L = \tilde{a}^2 \partial \Psi / \partial \phi$ (Desyatnikov, Kivshar, y Torner 2005), lo cual da, para los NBB $L = l\tilde{a}^2$, es decir, es proporcional a la carga topológica. Así, de la misma forma que la energía, existe un flujo en espiral hacia dentro del momento angular, estando este flujo descrito por

$$l\vec{j} = l\tilde{a}^2 \left(\frac{d\psi}{d\rho} \vec{u}_\rho + \frac{l}{\rho} \vec{u}_\phi \right). \quad (3.27)$$

Análogamente la integración sobre un círculo de radio ρ de la ecuación de continuidad para la densidad de momento angular $-\nabla_\perp \cdot (l\vec{j}) = l\tilde{a}^2$ arroja la expresión

$$-2\pi\rho l \frac{d\psi}{d\rho} \tilde{a}^2 = 2\pi \int_0^\rho d\rho \rho l \tilde{a}^{2M}, \quad (3.28)$$

que expresa que la pérdida de momento angular dentro de un círculo de radio ρ por transferencia al medio es también repuesta por un flujo de momento angular proveniente del exterior del círculo. Los NBB representan, en conclusión, estados estacionarios no lineales en los que existe un flujo permanente de potencia y momento angular desde el campo eléctrico hasta la materia.

3.2.2. Comportamiento asintótico

Por otra parte, el comportamiento asintótico revela también hechos característicos del mecanismo por el cual estos haces no se difractan ni se atenúan, y es de fundamental importancia para entender la dinámica no lineal de los haces de Bessel, como se verá en las siguientes secciones. A grandes radios, ρ , la intensidad es baja y el comportamiento vuelve a ser lineal. Como se vió, el BB lineal (3.13) se puede escribir como la suma de dos haces de Hänkel, que en variables adimensionales se escribe como:

$$\tilde{A}(\rho, \phi, \zeta) = \frac{1}{2} \left[b_0 H_l^{(1)}(\rho) + b_0 H_l^{(2)}(\rho) \right] e^{il\phi} e^{-i\zeta}. \quad (3.29)$$

El haz de Hänkel $b_0 H_l^{(1)}(\rho) e^{il\phi} e^{-i\zeta}$ transporta potencia espiralmente hacia fuera y el haz de Hänkel $b_0 H_l^{(2)}(\rho) e^{il\phi} e^{-i\zeta}$ espiralmente hacia dentro. Ambos tienen la misma amplitud que el BB lineal, de modo que no hay transporte neto de potencia en la sección transversal (Salo et al. 2000).

En el NBB, estas componentes no tienen igual amplitud (Porrás et al. 2004). Asintóticamente a grandes radios se comporta como

$$\tilde{A}(\rho, \phi, \zeta) \simeq \frac{1}{2} \left[b_{\text{out}} H_l^{(1)}(\rho) + b_{\text{in}} H_l^{(2)}(\rho) \right] e^{il\phi} e^{-i\zeta}, \quad (3.30)$$

de forma que siempre se cumple que $|b_{\text{in}}| > |b_{\text{out}}|$, es decir, siempre hay más flujo de intensidad hacia dentro que hacia fuera para compensar la absorción no lineal que tiene lugar principalmente en los anillos interiores.

Figura 3.7: Valores de $|b_{out}|$ y $|b_{in}|$ de los NBBs como funciones de la amplitud b_0 en un medio sin Kerr (a) y autofocalizante (b) para distintos valores de l . Las líneas verticales discontinuas corresponden al $b_{0,max}$ admitido.

Para determinar las amplitudes de las componentes de Hänkel, observamos que, de la ecuación de continuidad (3.23), a grandes radios

$$-2\pi\rho\frac{d\psi}{d\rho}\tilde{a}^2 = 2\pi\int_0^\infty d\rho\rho\tilde{a}^{2M} = N_\infty, \quad (3.31)$$

usando

$$\tilde{a}^2\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\text{Im}\left\{\tilde{A}\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial\rho}\right\}, \quad (3.32)$$

la expresión (3.30) y las expresiones asintóticas para las funciones de Hänkel a grandes radios ρ (Olver 2010)

$$\begin{aligned} H_l^{(1)}(\rho) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{i(\rho-\frac{\pi}{2}l-\frac{\pi}{4})} \\ H_l^{(2)}(\rho) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}e^{-i(\rho-\frac{\pi}{2}l-\frac{\pi}{4})}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

se llega a la primera de las relaciones que deben cumplir las amplitudes de las componentes de Hänkel,

$$|b_{in}|^2 - |b_{out}|^2 = N_\infty, \quad (3.34)$$

que muestra que en efecto $|b_{in}| > |b_{out}|$, excepto para medios transparentes, en los que $|b_{in}| = |b_{out}|$.

Escribiendo $b_{out} = |b_{out}|e^{i\beta_1}$ y $b_{in} = |b_{in}|e^{i\beta_2}$, usando la forma asintótica (3.30) y las expresiones (3.33) para las funciones de Hänkel, se encuentra, a grandes radios,

$$2\pi\rho\tilde{a}^2 \simeq |b_{out}|^2 + |b_{in}|^2 + 2|b_{out}||b_{in}|\cos\left[2\left(\rho - \frac{\pi}{2}l - \frac{\pi}{4}\right) + \beta_1 - \beta_2\right], \quad (3.35)$$

es decir, a grandes radios el perfil transversal de intensidad decae como $1/\rho$, y $2\pi\rho\tilde{a}^2$ oscila alrededor de un valor medio dado por

$$R = |b_{out}|^2 + |b_{in}|^2, \quad (3.36)$$

con un contraste en las oscilaciones de $C = 2|b_{\text{in}}||b_{\text{out}}|/(|b_{\text{out}}|^2 + |b_{\text{in}}|^2)$ en torno a ese valor medio. Tanto R como N_∞ se pueden evaluar fácilmente a partir de los perfiles radiales de intensidad de los NBBs, calculados numéricamente, y a partir de ellos, las amplitudes de las componentes de Hankel resultan ser, de (3.34) y (3.36),

$$\begin{aligned} |b_{\text{in}}| &= \frac{R + N_\infty}{2} \\ |b_{\text{out}}| &= \frac{R - N_\infty}{2}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Nuestros calculos para diferentes medios y con diferentes no linealidades nos muestran que cuando no hay no linealidades dispersivas tipo Kerr estas componentes son reales, es decir, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y cuando existe Kerr tienen fases opuestas, $\beta_2 = -\beta_1$. En las figuras 3.7 se muestran las amplitudes de NBBs con distintos valores de su carga topolgica, en medios con Kerr despreciable ($\alpha_j = 0$) y con Kerr saturable ($\alpha_2 > 0$ y $\alpha_4 < 0$), en funcin de su parmetro de amplitud b_0 .

3.3. Propagacin de haces de Bessel en medios no lineales

Una vez estudiados los estados estacionarios de la dinmica no lineal y estudiadas sus caractersticas principales, se aborda la tarea principal de este captulo: la propagacin de los haces de Bessel lineales introducidos en medios Kerr con absorcin no lineal.

La propagacin se estudia numricamente usando un algoritmo de split-step con transformada de Fourier anlogo al empleado en el caso de los haces de Airy, pero en esta ocasin usando un programa en FORTRAN, que resulta ms adecuado debido a que las dos dimensiones transversales del problema requieren mayor rapidez de clculo.

Estas simulaciones demuestran que los haces de Bessel de orden superior muy intensos introducidos en el medio no son completamente absorbidos, como le ocurrira a una onda plana. De modo anlogo a lo que le ocurrira a los haces de Airy, se estabilizan en un nuevo rgimen de propagacin no lineal estacionaria. Este hecho fue predicho tericamente y observado experimentalmente para los BB de orden cero hace una dcada (Porras et al. 2004; Polesana et al. 2007). En esta tesis y en nuestro artculo (Porras y Ruiz-Jimnez 2014) se demuestra que este fenmeno ocurre tambin con BB de orden superior o con vrtice y el estado estacionario no lineal final es un NBB con la misma carga topolgica y mismo ngulo cnico que el BB lineal introducido. Curiosamente, el artculo fue publicado en octubre de 2014, mismo mes en que apareca otro artculo que tambin describa estos haces, (Jukna et al. 2014), lo que muestra la actualidad de estas investigaciones. Como veremos, nosotros logramos adems identificar cul es el rgimen de propagacin alcanzado en la dinmica y el haz atractor que la rige.

Ms especficamente, resolvemos numricamente la NSE (3.16), imponiendo como condicin inicial, en $\zeta = 0$, el BB lineal con vrtice, es decir,

$$\tilde{A}(\rho, \phi, 0) = b_0 J_l(\rho) e^{il\phi}, \tag{3.38}$$

Figura 3.8: (a) Perfiles transversales de intensidad para distintos valores de ζ en la propagación de un BB con vórtice $l = 1$ y amplitud $b_0 = 3$ introducido en un medio con absorción a cuatro fotones ($M = 4$) sin autofocalización ($\alpha_2 = \alpha_4 = 0$). Las líneas grises representan el BB inicial y las discontinuas el NBB atractor de la dinámica. (b) Pérdidas no lineales por unidad de longitud como función de la distancia ζ . (c) Gráficas de propagación en 3D para el mismo BB introducido en el medio anterior, en otro con autofocalización ($\alpha_2 = 2, \alpha_4 = -1$) y en otro con autodesfocalización ($\alpha_2 = -2, \alpha_4 = 1$).

con amplitud determinada por b_0 . En la figura 3.8 (a) se representan los perfiles radiales de intensidad a distintas distancias de propagación. Por sencillez, se supone primero un medio sin Kerr ($\alpha_j = 0$). Se observa que se alcanza un estado estacionario final, una vez que se ha pasado por una fase de fuerte absorción². De hecho, el haz no lineal final mantiene su perfil radial a pesar de seguir existiendo pérdidas no lineales por unidad de longitud no nulas,

$$N(\infty) = 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho |\tilde{A}|^{2M}, \quad (3.39)$$

a lo largo de la propagación. En el régimen no lineal estacionario, como se ve en la figura 3.8 (b), estas pérdidas alcanzan un valor constante no nulo. En las figuras 3.8 (a) y la primera de las figuras 3.8 (c), se aprecia cómo la tendencia hacia el estado final se inicia en los lóbulos centrales y se va extendiendo cónicamente hasta $z = r/\theta$ (o bien $\zeta = \rho/2$ en nuestras variables adimensionales). Esto es así también en el caso de medios autofocalizantes o desfocalizantes [$\alpha_2 > 0$ y $\alpha_2 < 0$, últimas dos figuras de 3.8 (c)], con la única diferencia de que en el haz que se forma finalmente se observan los lóbulos centrales más juntos y estrechos o más separados y anchos, respectivamente. El perfil de intensidad del haz que mejor se ajusta a este estado final estacionario es precisamente un NBB con vórtice de los descritos en la sección 3.2, mostrado en la figura 3.8 por medio de una línea a trazos, concretamente aquel que tiene como parámetros $b_0 = 1.60$, $l = 1$ y $M = 4$. Se concluye por tanto que el atractor de la dinámica no lineal que se da al introducir un BB lineal con vórtice en un medio Kerr con absorción no lineal es un NBB con vórtice.

3.4. Problema de selección

Se realiza a continuación el estudio conducente a identificar el NBB con vórtice que se forma espontáneamente en la propagación. Se trata de discernir cuál de todos los posibles estados estacionarios existentes constituye el atractor de la dinámica no lineal. Para ello, resulta de mucha importancia el análisis asintótico mostrado en la subsección 3.2.2.

Para entender el problema de selección en este caso hay que diferenciar claramente entre la amplitud del BB inicial, $b_0(0)$, que introducimos en el medio, y el parámetro de amplitud $b_0(\infty)$ asociado al NBB estacionario que se forma al cabo de una cierta distancia de propagación. Por ejemplo, en la figura 3.8 teníamos un BB inicial con $b_0(0) = 3$ que devenía un NBB con $b_0(\infty) = 1.60$. El problema que seguía pendiente en referencias experimentales (Polesana et al. 2006) para BBs y NBBs sin vórtices era la predicción del estado final, es decir, $b_0(\infty)$. En la figura 3.9 mostramos los resultados numéricos de los pares $[b_0(0), b_0(\infty)]$ para haces sin y con vórtice introducidos en agua, con $n_0 = 1.461$, $n_2 = 2.7 \times 10^{-16} \text{cm}^2/\text{W}$, en donde el orden de absorción a 800 nm es $M = 4$, y el coeficiente $\beta^{(4)} = 2 \cdot 10^{-34} \text{cm}^2/\text{W}^3$ (Gaizauskas et al. 2008). Puede apreciarse en las gráficas que a medida en que se aumenta la amplitud $b_0(0)$ del BB lineal inicial, también aumenta el valor $b_0(\infty)$ del NBB final. Para amplitudes suficientemente altas, el NBB atractor es

²Por tanto, este haz final no difractante no requiere de no linealidades de tipo Kerr para su estacionariedad, como ocurre con los solitones con vórtice (Malomed, Crasovan, y Mihalache 2002; Yakimenko, Zaliznyak, y Kivshar 2005).

Figura 3.9: Valores de $b_0(\infty)$ en función de $b_0(0)$ del NBB resultado de la inmersión en agua, con $n_0 = 1.461$ y $n_2 = 2.7 \times 10^{-16} \text{cm}^2/\text{W}$, de un BB con (a) $l = 0$ y (b) $l = 1$. El orden de absorción a 800 nm es $M = 4$, y el coeficiente $\beta^{(4)} = 2 \cdot 10^{-34} \text{cm}^2/\text{W}^3$ (Gaizauskas et al. 2008) ($\alpha_2 = 0.5$ y $\alpha_4 = -0.25$). Las líneas discontinuas corresponden a las componentes de Hankel, resultando en ambos casos para la componente entrante la funcion identidad $|b_{\text{in}}(\infty)| = b_0(0)$.

muy proximo al NBB lmite con $b_{0,\text{max}}$.

Como hicimos en el caso de los haces de Airy, la solucion del problema de seleccion surge al representar tambien las amplitudes entrante y saliente, $b_{\text{in}}(\infty)$ y $b_{\text{out}}(\infty)$ del NBB atractor con $b_0(\infty)$, evaluadas como se explic en la subseccin 3.2.2, y representadas en la figura 3.9 con lneas discontinuas. Como puede apreciarse en la figura, $|b_{\text{in}}(\infty)| = b_0(0)$, es decir que, al igual que vimos en los haces de Airy, dado que para el BB lineal introducido en el medio se cumple que $|b_{\text{in}}(0)| = b_0(0)$, llegamos a la conclusin de que *la amplitud de la componente entrante de Hankel se conserva en la propagacin no lineal*:

$$|b_{\text{in}}(\infty)| = b_{\text{in}}(0) [= b_0(0)]. \quad (3.40)$$

Esta ley de conservacin determina unvocamente el NBB atractor de la dinmica. Dado un medio material (M , α_2 y α_4) y una vorticidad o carga topolgica, grficas como la de las figuras 3.7 para la amplitud de la componente de Hankel entrante pueden obtenerse a partir de los perfiles radiales de los HNBLs que existen en el medio. El NBB atractor puede obtenerse a partir de estas grficas como aquel cuya amplitud de la componente de Hankel entrante coincide con la amplitud b_0 del BB lineal que entr en el medio.

3.5. Conclusin

En este captulo se ha identificado el haz atractor que se forma espontneamente al propagar haces de Bessel lineales de cualquier orden en medios Kerr con absorcin no lineal. Para ello, se han estudiado las caractersticas de los haces de Bessel no difractantes, tanto lineales como no lineales, describiendo por primera vez el NBB no difractante con vrtice (Porrs y Ruiz-Jimnez 2014). Se analiza el comportamiento asinttico de los haces no lineales a grandes distancias radiales por medio de su descomposicin en componentes de Hankel. Se demuestra que existe un flujo de potencia que se transmite desde el reservorio

infinito de potencia que poseen hacia el centro del haz. A partir de un análisis numérico exhaustivo de la propagación no lineal, se encuentra, al igual que en el caso de los haces de Airy estudiados en el capítulo 2, una ley de conservación que determina cuál de los haces no lineales no difractantes se va a formar. Este haz atractor, identificado como uno de los haces de Bessel no lineales no difractantes ya descritos (Porras et al. 2004; Porras y Ruiz-Jiménez 2014), será aquel que tenga una amplitud de su componente de Hänkel entrante igual a la que tiene el haz lineal introducido en el medio. Esta identificación será fundamental para el desarrollo de muchas aplicaciones prácticas de estos haces de Bessel en medios no lineales. El estudio del haz de Bessel real de potencia finita se pospone, por su complejidad, para el siguiente capítulo.

PROPAGACIÓN NO LINEAL DE HACES DE BESSEL REALES GENERADOS POR AXICONES

En este capítulo se estudia la situación práctica de la propagación no lineal de BBs con potencia finita generados por dispositivos reales, fundamentalmente axicones. Dada la cercanía del problema a los experimentos reales, evitamos en este capítulo el uso de variables normalizadas, lo cual, al mismo tiempo, nos permite apreciar más claramente los órdenes de magnitud de las intensidades y distancias involucradas. También, dada la complejidad del problema (como será pronto patente), restringimos el análisis al caso de BBs sin vórtice. El contenido de este capítulo ha sido publicado recientemente en *Physical Review A* (Porras, Ruiz-Jiménez, y Losada 2015) y ha sido seleccionado como artículo de especial relevancia por sus editores, habiéndose hecho eco de ello varias páginas web de divulgación científica (SINC 2016; Phys.org 2016).

4.1. Introducción

En los estudios experimentales y numéricos de la propagación de BBs no lineales se consideran usualmente dos configuraciones diferentes. En la primera disposición, el BB se introduce en el medio cuando ya está formado (Gadonas et al. 2001; Pyragaitė et al. 2005; Polesana et al. 2005; Gaizauskas et al. 2006; Polesana et al. 2006; Polesana et al. 2007; Porras y Ruiz-Jiménez 2014), por ejemplo, el BB ideal en cualquier plano transversal, como se vio en la sección 3.3 del capítulo 3, o el BB apodizado que se forma en el foco de un axicón, situado a la mitad de la llamada zona de Bessel. Esta es la llamada introducción “abrupta” en el medio, ilustrada en la parte superior de la figura 4.1. Excepto en el caso de que la absorción no lineal domine inicialmente la dinámica (Polesana et al. 2005; Polesana et al. 2006; Porras y Ruiz-Jiménez 2014), la no linealidad Kerr induce en este caso inestabilidades temporales y espaciales grandes (Gaizauskas et al. 2006; Polesana et al. 2007). Esta configuración ha sido también estudiada en relación a los haces de Airy en la subsección 2.7.1 del capítulo 2, donde también daba lugar a inestabilidades.

En la mayoría de los experimentos de filamentación con BBs (Polesana et al. 2007; Polesana et al. 2008; Couairon et al. 2013; Jukna et al. 2014; Xie et al. 2015) y en los estudios numéricos relacionados (Roskey et al. 2007), la radiación que sale del generador

Figura 4.1: Tipos de incidencia en el medio. Un haz gaussiano incide sobre una lente axicon. Arriba, incidencia abrupta en el medio, cuando el BB está totalmente formado. Abajo, incidencia suave en donde el BB tiene un perfil más gaussiano.

del haz, habitualmente un axicón, entra en el medio no lineal antes de la formación del BB, en un estado con un bajo y esparcido nivel de intensidad, de modo que el BB no está todavía formado, y dado que la propagación será no lineal, no se formará nunca. Con un axicón, por ejemplo, el medio se sitúa en contacto con él, o simplemente llena el espacio que lo circunda, como en los experimentos de filamentación con gases. Esta disposición de introducción “suave” ha demostrado ser útil para prevenir la aparición de inestabilidades temporales grandes en el medio no lineal (Polesana et al. 2007). La introducción suave se ilustra en la parte inferior de la figura 4.1 y en las figuras 4.2 (a) y 4.2 (c) se muestran dos simulaciones de propagación lineal para dos haces gaussianos incidiendo en dos axicones de distintos ángulos. Se observa cómo en el centro de la zona de Bessel se forma un BB real de potencia finita, de intensidad pico característica I_B .

La introducción suave ha sido también estudiada en relación con los haces de Airy en la subsección 2.7.2 del capítulo 2, donde daba lugar a la formación de un haz de Airy no lineal (NAB). Como se puede apreciar en las figuras 4.2 (b) y (d), con los haces de Bessel la situación es más compleja, por tratarse de un caso bidimensional. Con esta configuración de introducción suave han sido observados dos regímenes de propagación del BB detrás del axicón muy diferentes (Polesana et al. 2008). En el llamado régimen de propagación estable, mostrado en la figura 4.2 (b), la radiación de entrada sufre una transformación en un estado cuasi-estacionario en la zona de Bessel que ha sido identificado como un NBB. En la figura 4.2 (d) se muestra el llamado régimen inestable, en donde la intensidad de la luz fluctúa en oscilaciones periódicas, cuasi-periódicas o incluso caóticas en la zona de Bessel. En los experimentos y simulaciones numéricas, este régimen está asociado a ángulos cónicos generados por el axicón pequeños y potencias de entrada relativamente bajas, de forma que la autofocalización Kerr es la no linealidad dominante.

Las oscilaciones observadas en el régimen inestable de la figura 4.2 (d) se suponen debidas a que, para ángulos pequeños, la anchura del lóbulo central del haz, más intenso, es

Figura 4.2: Regímenes de evolución detrás del axicón en incidencia suave. (a) Propagación en condiciones lineales de un haz gaussiano de cintura $w = 1.5$ cm e intensidad pico $I_G = 0.0666$ TW/cm², iluminando un axicón de ángulo cónico $\theta = 0.15^\circ$ a 800 nm. En el foco del axicón, centro de la zona de Bessel en $z_B \simeq 286$ cm, se observa la formación del BB de intensidad pico $I_B = 39.17$ TW/cm² y su ulterior decaimiento. (b) Con el mismo haz incidente sobre el mismo axicón, en propagación no lineal en aire, se observa un régimen estable, que ha sido identificado con un NBB. Con un axicón de menor ángulo, $\theta = 0.05^\circ$, y un haz gaussiano incidente de $w = 2.5$ cm e $I_G = 0.03113$ TW/cm², (c) en propagación lineal se forma un BB de $I_B = 10.165$ TW/cm² en el foco ($z_B \simeq 1432$ cm). (d) Mismo axicón y haz incidente que en (c) en propagación no lineal en aire dando lugar a un régimen inestable no explicado hasta ahora.

mayor¹, y por tanto transporta una potencia mayor que para ángulos más grandes. Esto conlleva que alcance la potencia crítica necesaria para su autofocalización mucho antes, y se forme un pico de intensidad. En ese momento actúa la absorción no lineal deteniendo el colapso, haciendo decrecer el pico de intensidad, que vuelve a crecer a continuación debido al flujo de potencia proveniente del exterior del haz y así sucesivamente. Este régimen de fluctuaciones observado no se había relacionado hasta ahora con ningún NBB y la literatura se había limitado a describirlo cualitativamente, como se acaba de explicar .

En este capítulo nuestro objetivo es proporcionar una comprensión unificada de estos dos regímenes de propagación de BBs bajo condiciones de introducción suave, la más habitual experimentalmente. Se muestra que estos dos regímenes son diferentes manifestaciones de la misma dinámica subyacente. En ambos regímenes, el estable y el inestable,

¹Para un BB fundamental el primer lóbulo tiene una anchura aproximada de $2/(k_0\theta)$.

la dinámica está regida por la existencia de un atractor en la forma de un NBB específico, como ocurría con los haces de Bessel ideales estudiados en el capítulo 3. Se identifica el NBB atractor y se deriva una expresión analítica aproximada que determina el atractor en términos de las propiedades del medio no lineal y del haz de luz que ilumina el axicón. De nuevo, el atractor es el NBB cuya amplitud de la componente entrante de Hankel es la misma que tendra el BB que se formara si la propagacin fuese lineal detrs del axicn. Sin embargo, hacemos nfasis en que un atractor no es necesariamente un atractor estable, lo que puede inducir una dinmica ms rica, incluyendo un comportamiento peridico, cuasi-peridico o catico alrededor de l. Los rgimenes inestable o estable observados detrs del axicn estn determinados por la estabilidad o inestabilidad de este NBB atractor bajo pequeas perturbaciones, y en concreto, por la existencia o no de un modo inestable que crece exponencialmente. De hecho, la dinmica inestable en la zona de Bessel del axicn se desencadena cuando existe este modo inestable, reproduciendo su frecuencia de oscilacin caracterstica, y su ulterior desarrollo en grandes oscilaciones inarmnicas peridicas o cuasi-peridicas, o su desarrollo en oscilaciones caticas, dependiendo de la ganancia del modo inestable. Aunque previamente se ha sugerido que este rgimen inestable est asociado con la inestabilidad de cierto NBB (Polesana et al. 2007; Couairon et al. 2013), slo la identificacin del NBB atractor realizada por nosotros es la que nos permite analizar sus propiedades de estabilidad o inestabilidad, y de esto verificar esa hiptesis en trminos cuantitativos.

Por simplicidad nos centramos en BBs generados por axicones en la mayora de las simulaciones numricas, pero los mismos resultados se mantienen para otras condiciones de introduccin suave, como con haces de Bessel-Gauss. Se ilustran los resultados para el aire a 800 nm, en donde los ngulos caractersticos que separan los diferentes rgimenes son bastante pequeos, pero se suponen vlidos los mismos resultados para grandes ngulos (pero todava paraxiales) en materia condensada. Como propiedades pticas del aire a 800 nm se ha tomado $n_0 \simeq 1$, $n_2 = 3.2 \times 10^{-19} \text{ cm}^2/\text{W}$, $M = 8$, $\beta^{(8)} = 1.8 \times 10^{-94} \text{ cm}^{13}/\text{W}^7$ (Couairon et al. 2013).

4.2. Haces de Bessel no lineales en unidades reales

Como se ha dicho, partimos de la ecuacin NSE sin normalizar (1.48) con Kerr cbico y absorpcin no lineal, y el estado estacionario no lineal (3.14) en nuestro caso ser el haz con $l = 0$ (sin vrtice) $A(r, z) = a(r) \exp[i\psi(r)] \exp(i\delta z)$, con nuestro habitual acortamiento de la constante de propagacin $\delta = -k_0\theta^2/2$ correspondiente al ngulo cnico θ en la aproximacin paraxial. De esta forma la ecuacin (3.19) que determina los NBBs quedara, en unidades reales, como

$$\frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da}{dr} + k_0^2 \theta^2 a - \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 a + \frac{2k_0^2 n_2}{n_0} a^3 = 0, \quad (4.1)$$

y la ecuacin para la fase (3.20) quedara como la ley de conservacin, anloga a (3.23),

$$-F_r \equiv -\frac{1}{k_0} 2\pi r \frac{d\psi}{dr} a^2 = \beta^{(M)} 2\pi \int_0^r dr r a^{2M} \equiv N_r, \quad (4.2)$$

Figura 4.3: (a) Región de existencia de los NBBs en el espacio de parámetros (I_0, θ) para el aire a 800 nm. La curva discontinua negra es la aproximación analítica $(I_{0,\max}, \theta)$ que damos en (4.3). A la derecha de la curva gris discontinua domina la absorción no lineal en el sentido de que $L_{\text{MPA}} < L_R$ y $L_{\text{MPA}} < L_{\text{SPM}}$. Los subgráficos 1 y 2 representan los perfiles de amplitud transversal de un NBB con $\theta = 0.15^\circ$ para $I_0 = 12 \text{ TW/cm}^2$ e $I_0 = 28 \text{ TW/cm}^2$ respectivamente, frente a los perfiles del BB correspondiente (en línea discontinua). Estos perfiles corresponden a los puntos 1 y 2 del espacio de parámetros. (b) Valores de $|b_{\text{in}}|^2$ y $|b_{\text{out}}|^2$ para los NBBs de $\theta = 0.15^\circ$ y $\theta = 1^\circ$ calculados numéricamente (curvas grises discontinuas) frente a la curva teórica (curva continua).

que describe el mecanismo de reposición de potencia desde el infinito, de forma que las pérdidas por absorción no lineal en un círculo de radio r , N_r , son repuestas por un flujo radial en sentido contrario, $-F_r$, a través de su circunferencia. Las condiciones iniciales para la obtención de los perfiles radiales de los NBBs son $a(0) = \sqrt{I_0}$, $a'(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0$, donde I_0 es la intensidad pico del NBB, que, en el caso de $l = 0$, tiene lugar en el centro del haz, $r = 0$. Como ya se ha dicho, para cada ángulo cónico θ solamente existirán estos haces estacionarios hasta un máximo de intensidad $I_{0,\max}$ que dependerá de las propiedades ópticas del medio a la frecuencia ω_0 considerada. En la figura 4.3 (a) se muestra la región de existencia de los NBBs sin vórtice en el espacio de parámetros (I_0, θ) que los determinan, en el aire a 800 nm, junto con dos perfiles típicos de intensidad, uno en el caso de que la MPA es baja y otro en el caso en que es predominante sobre la difracción y el efecto Kerr. La región de existencia está delimitada por la curva negra, calculada numéricamente. La curva negra discontinua es una aproximación semianalítica dada por (Porrás et al. 2004)

$$\theta^2 = \sigma_M \frac{\beta^{(M)} I_{0,\max}^{M-1}}{k_0} - \frac{2n_2 I_{0,\max}}{n_0}, \quad (4.3)$$

con $\sigma_M = 0.542, 0.381, 0.313, 0.295, 0.244, 0.223 \dots$ para $M = 3, 4, \dots$

Como vimos en la expresión (3.30), a grandes distancias radiales podemos descomponer el NBB en dos haces de Hänkel cuyas amplitudes están descompensadas,

$$A(r, z) \simeq \frac{1}{2} \left[b_{\text{out}} H_0^{(1)}(k_0 \theta r) + b_{\text{in}} H_0^{(2)}(k_0 \theta r) \right] e^{i\delta z}, \quad (4.4)$$

que se reduce al BB lineal de intensidad I_B cuando $b_{\text{in}} = b_{\text{out}} = \sqrt{I_B}$. En la figura 4.3 (b) se muestran los valores de $|b_{\text{out}}|^2$ y $|b_{\text{in}}|^2$ para NBBs en aire a 800 nm con ángulos cónicos de $\theta = 0.15^\circ$ y $\theta = 1^\circ$ a distintas intensidades I_0 , evaluados como se explicó en la subsección 3.2.2 del capítulo 3.

4.3. Propagación de haces de Bessel lineales reales en medios no lineales

4.3.1. El haz de Bessel no lineal atractor

Se ha demostrado experimentalmente (Polesana et al. 2006) que un BB $A(r, 0) = \sqrt{I_B} J_0(k_0 \theta r)$ introducido en un medio no lineal en el régimen en donde la absorción no lineal es importante se transforma espontáneamente en un NBB que preserva el ángulo cónico. Como se ha visto en el capítulo 3, en el caso ideal de los BBs que transportan potencia infinita, y para la más amplia familia de NBBs con vórtice, hemos identificado el NBB atractor específico con aquel cuya amplitud de la componente de Hänkel entrante es igual a la amplitud del BB lanzado, es decir, $|b_{\text{in}}| = \sqrt{I_B}$ (Porrás y Ruiz-Jiménez 2014). Como $b_{\text{in}} = b_{\text{out}} = \sqrt{I_B}$ para el BB entrante, se puede decir que la amplitud de la componente de Hänkel entrante es una cantidad conservada en la dinámica no lineal.

Como se comentó en la introducción, en el caso real, la potencia es finita y el medio está situado cerca o en contacto con el axicón (u otro generador de BBs), o simplemente rellena el espacio que lo circunda, de forma que el BB no está formado cuando la radiación entra en el medio, y se propaga inicialmente de forma lineal. Con un axicón, por ejemplo, el campo que entra inmediatamente después de él en el medio no lineal en $z = 0$ se modela usualmente por

$$A(r, 0) = \sqrt{I_G} e^{-r^2/w^2} e^{-ik_0 \theta r}, \quad (4.5)$$

que representa el haz gaussiano que ilumina el axicón de anchura w e intensidad máxima I_G , al que el axicón le ha imprimido una fase cónica $e^{-ik_0 \theta r}$ (Couairon et al. 2013). Si la propagación fuese lineal, la condición inicial 4.5 produciría un BB apodizado, $A \simeq \sqrt{I_B} J_0(k_0 \theta r)$, de intensidad

$$I_B = \frac{\pi k_0 w \theta I_G}{\sqrt{e}}, \quad (4.6)$$

a una distancia de $z_B = w/2\theta$ del axicón (la distancia al punto medio de la zona de Bessel w/θ) (Couairon et al. 2013). Bajo estas condiciones de introducción suave, el régimen inestable en el medio no lineal, ocurre con ángulos cónicos pequeños e intensidades relativamente bajas, produciendo oscilaciones periódicas o cuasi-periódicas de la intensidad del haz en cualquiera de sus puntos durante la propagación (Polesana et al. 2008; Couairon et al. 2013), aunque también puede resultar en oscilaciones sin ninguna periodicidad aparente que podrían identificarse con caos, como se verá más adelante. El régimen estable en la propagación no lineal se observa a ángulos grandes y a mayores intensidades, y ha sido explicado en términos de la formación de un NBB (Polesana et al. 2007; Polesana et al. 2008; Couairon et al. 2013).

Figura 4.4: (a) Para un haz gaussiano de anchura $w = 1.5$ cm e intensidad pico $I_G = 0.0666$ TW/cm² iluminando un axicón que forma un BB de ángulo cónico $\theta = 0.15^\circ$ e intensidad pico $I_B = 39.17$ TW/cm² en el centro $z_B \simeq 286$ cm de la zona de Bessel en la propagación lineal (curvas discontinuas), intensidad sobre el eje en la propagación lineal en el aire a 800 nm (curva continua), e intensidad evaluada numéricamente $I_0 = 28$ TW/cm² del NBB con $|b_{in}|^2 = I_B$ (curva continua gris). (b) Perfil radial a distancias crecientes de propagación hasta el centro de la zona de Bessel (curvas continuas), y perfil de intensidad radial del NBB con $|b_{in}|^2 = I_B$ (curva discontinua gris). (c) y (d) Lo mismo que en (a) y (b) pero con $I_G = 0.0174$ TW/cm² para el haz gaussiano incidente, $I_B = 10.22$ TW/cm² para el BB lineal, e $I_0 = 12$ TW/cm² para el NBB con $|b_{in}|^2 = I_B$.

Como se señalaba en la introducción, nuestra aportación es explicar ambos regímenes de modo unificado, introduciendo la hipótesis, corroborada por simulaciones numéricas, de que en ambos regímenes existe un NBB atractor. Identificamos el NBB atractor como aquel cuya amplitud de la componente de Hänkel entrante coincide con la amplitud del BB que generaría el axicón en la propagación lineal, es decir, el NBB con $|b_{\text{in}}| = \sqrt{I_B}$. Como $b_{\text{in}} = b_{\text{out}} = \sqrt{I_B}$ para el BB que se formaría en condiciones lineales, vemos que la amplitud de la componente entrante de Hänkel no se ve afectada por las no linealidades y en este sentido podemos decir que se conserva. Esta conclusión se ha extraído de simulaciones numéricas masivas, de las cuales solo se muestran unas pocas a continuación. Conceptualmente, no es difícil de entender que la componente entrante creada por el axicón, incluso en el caso de potencia finita, que suministra potencia cónicamente de fuera a adentro, no se vea afectada por la absorción no lineal en el centro del haz en la zona de Bessel. La ley $|b_{\text{in}}| = \sqrt{I_B}$ es la misma que vimos en el capítulo 3, con la única diferencia que allí I_B es la intensidad del BB ideal que entra en el medio.

Las simulaciones numéricas mostradas en la figura 4.4 ilustran esta ley para un axicón que produce un ángulo cónico de $\theta = 0.15^\circ$ iluminado por haces gaussianos de anchura $w = 1.5$ cm e intensidades $I_G = 0.0666$ y $I_G = 0.0174$ TW/cm² propagándose en el aire a $\lambda = 800$ nm. Si la propagación fuese lineal, estos haces gaussianos formarían BBs detrás del axicón: las curvas a trazos en las figuras 4.4 (a) y 4.4 (c) muestran la intensidad en el centro del haz ($r = 0$) y cómo alcanzan en el centro de la zona de Bessel la línea horizontal a trazos correspondiente a las intensidades $I_B = 39.17$ TW/cm² e $I_B = 10.22$ TW/cm² de estos BBs lineales, dadas por la ecuación (4.6). En la propagación no lineal, en el régimen estable que se observa en la figura 4.4 (a), la intensidad sobre el eje en el centro del haz (línea continua) en la zona de Bessel se estabiliza en la intensidad, evaluada numéricamente, $I_0 = 28$ TW/cm² (línea continua horizontal I_0), correspondiente al NBB que tiene $|b_{\text{in}}|^2 = I_B = 39.17$, como puede verificarse mirando la figura 4.3 (b). El haz en su totalidad se transforma, de hecho, en este NBB atractor, como se ve en la figura 4.4 (b), que muestra los perfiles radiales de intensidad a distancias crecientes hasta el centro de la zona de Bessel en $z_B = 286$ cm. En el régimen inestable que puede verse en la figura 4.4 (c), la intensidad del haz en el eje (línea continua) también se aproxima, pero oscila alrededor de la intensidad $I_0 = 12$ TW/cm² (línea continua horizontal I_0). De nuevo, el NBB con $I_0 = 12$ TW/cm² tiene justamente $|b_{\text{in}}| = \sqrt{I_B} = 10.22$ TW/cm², como se puede ver en la figura 4.3 (b), y lo mismo le ocurre al perfil radial en su totalidad a distancias crecientes. Estas oscilaciones son debidas a la inestabilidad (pequeña en este caso) de este NBB, como se verá. Las oscilaciones pueden ser mucho más pronunciadas y desordenadas en otros casos, pero siempre observan las características propias de la inestabilidad del NBB con $|b_{\text{in}}|^2 = I_B$. Por supuesto, a diferencia del caso de BBs ideales, la intensidad siempre decae gradualmente a cero al final de la zona de Bessel, ya que el flujo cónico de potencia impuesto por el axicón termina.

La ley $|b_{\text{in}}| = \sqrt{I_B}$ se mantiene para otros modelos de BB lineal de potencia finita introducidos en el medio no lineal “suavemente”, como el haz de Bessel-Gauss (Borghi, Santarsiero, y Porras 2001)

$$A(r, z) = \sqrt{I_B} \frac{w^2}{w^2 + \frac{2iz}{k_0}} J_0 \left(\frac{w^2}{w^2 + \frac{2iz}{k_0}} k_0 \theta r \right) \exp \left(-\frac{r^2 + z^2 \theta^2}{w^2 + \frac{2iz}{k_0}} \right), \quad (4.7)$$

Figura 4.5: Los mismo que en la figura 4.4 (a) y (c) pero el haz que incide en el medio es el haz de Bessel-Gauss de la ecuación (4.7) con $w = 2$ cm en $z = -929$ cm desde la cintura en $z = 0$. En (a), $I_B = 39.17$ TW/cm² conducente a $I_0 = 28$ TW/cm², y en (b), $I_B = 10.22$ TW/cm², conducente a $I_0 = 12$ TW/cm².

solución de la LSE (1.17), que representa un BB apodizado $\sqrt{I_B} J_0(k_0 \theta r) e^{-r^2/w^2}$ en $z = 0$ que se forma gradualmente desde intensidades muy bajas a valores de z muy negativos, y se deshace (difracta) de nuevo en valores positivos de z . Para la introducción suave en el medio, el plano de entrada $z = z_{\text{in}}$ es tal que la intensidad es lo suficientemente baja para que los efectos no lineales sean inicialmente despreciables. Para $w = 2$ cm y $z_{\text{in}} = -929$ cm, propagación en el aire a la misma longitud de onda, y las mismas intensidades $I_B = 39.17$ y $I_B = 10.22$ TW/cm² del haz de Bessel-Gauss que se tendrían en $z = 0$, se ve en la figura 4.5 que los NBB atractores tienen las mismas intensidades $I_0 = 28$ y $I_0 = 12$ TW/cm² que con el axicón, siguiéndose cumpliendo así la ley $|b_{\text{in}}| = \sqrt{I_B}$.

Así, dada la intensidad I_B del BB que produce un dispositivo generador de haces de Bessel (lo cual es en general elemental), es posible prever el NBB atractor de la dinámica no lineal. En la práctica, esto requiere extraer numéricamente los valores de $|b_{\text{in}}|^2$ de los perfiles radiales de los NBBs de diferentes intensidades I_0 con el ángulo cónico dado y el medio particular dados, como se ha explicado en el capítulo 3 y se muestra en la línea discontinua en la figura 4.3 (b) (Porrás y Ruiz-Jiménez 2014), e identificar el NBB particular con $|b_{\text{in}}|^2 = I_B$. Este largo procedimiento numérico se simplificaría si se dispusiese de una fórmula analítica que determine $|b_{\text{in}}|^2$ en función de los parámetros (θ, I_0) del NBB y las propiedades ópticas del medio, tarea que abordamos en la siguiente subsección.

4.3.2. Fórmula analítica aproximada para el haz de Bessel no lineal atractor

Una expresión aproximada puede obtenerse como sigue. En primer lugar, hay que hacer notar que la expresión (3.34), unida a la ecuación (4.2), y en unidades reales, queda

$$N_\infty = \frac{|b_{\text{in}}|^2 - |b_{\text{out}}|^2}{k_0} = \beta^{(M)} 2\pi \int_0^\infty dr r a^{2M}, \quad (4.8)$$

y que la mayor parte de las pérdidas no lineales ($\sim N_\infty$) se producen en el lóbulo central, más intenso, en donde $r \rightarrow 0$, y se puede hacer la aproximación (Johannisson et al. 2003)

$$a(r) \simeq \sqrt{I_0} J_0 \left(\sqrt{2k_0(|\delta| + k_{\text{NL}})} r \right) = \sqrt{I_0} J_0 \left(\sqrt{k_0^2 \theta^2 + 2k_0 k_{\text{NL}}} r \right), \quad (4.9)$$

donde $k_{\text{NL}} = k_0 n_2 I_0 / n_0$. Esta expresión indica que el máximo central del NBB es aproximadamente una función de Bessel estrechada debido al efecto Kerr.

Introduciendo este resultado en (4.8) se obtiene una primera relación entre $|b_{\text{in}}|$ y $|b_{\text{out}}|$ en función de los parámetros (θ, I_0) que definen el NBB y las propiedades del medio:

$$k_0 N_\infty = |b_{\text{in}}|^2 - |b_{\text{out}}|^2 \simeq \frac{\beta^{(M)} I_0^M}{k_0 \theta^2 (1 + 2n_2 I_0 / n \theta^2)} \gamma^{(M)}, \quad (4.10)$$

en donde se define la integral numérica $\gamma^{(M)} \equiv 2\pi \int_0^\infty J_0^{2M}(x) x dx$.

En segundo lugar, en los lóbulos más lejanos, $r \rightarrow \infty$, el haz apenas experimenta absorción, dadas las bajas intensidades que allí se dan. Se comprueba, por observación puramente numérica de los valores de $|b_{\text{in}}|$ y $|b_{\text{out}}|$, que la media $(|b_{\text{in}}| + |b_{\text{out}}|)/2$ para NBBs con I_0 no demasiado próxima a $I_{0,\text{max}}$, es aproximadamente igual al valor $|b_{\text{in}}| = |b_{\text{out}}| \equiv |b_{\text{Kerr}}|$ de las amplitudes de las expresiones asintóticas de los NBBs si el medio no tuviese absorción. En este caso ($\beta^{(M)} = 0$), los NBBs tendrían la forma asintótica $a(r) \simeq (1/2)[b_{\text{Kerr}} H_0^{(1)}(k_0 \theta r) + b_{\text{Kerr}}^* H_0^{(2)}(k_0 \theta r)]$, puesto que no hay absorción ($N_\infty = 0$). Para determinar $|b_{\text{Kerr}}|$ procedemos como sigue. De la ecuación (4.2) con $\beta^{(M)} = 0$ se obtiene que $\psi(r) = \text{cte}$. Por otro lado, la ecuación (4.1) queda, reescrita en las variables $\rho = k_0 \theta r$ y $\tilde{a} = a / \sqrt{I_0}$,

$$\frac{d^2 \tilde{a}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{a}}{d\rho} + \tilde{a} + \eta \tilde{a}^3 = 0, \quad (4.11)$$

donde

$$\eta = 2n_2 I_0 / n_0 \theta^2 \quad (4.12)$$

Los estados estacionarios en el medio transparente son las soluciones de esta ecuación con $\tilde{a}(0) = 1$ y $d\tilde{a}/d\rho(0) = 0$. Este problema se ha resuelto numéricamente para todos los valores del parámetro η y se ha encontrado que la amplitud se comporta asintóticamente como $\tilde{a}(\rho) \simeq (1/2)[\tilde{b}_{\text{Kerr}} H_0^{(1)}(\rho) + \tilde{b}_{\text{Kerr}}^* H_0^{(2)}(\rho)]$, y que $|\tilde{b}_{\text{Kerr}}|$ se ajusta a la función $|\tilde{b}_{\text{Kerr}}| = f(\eta) \equiv (1 + c\eta)/(1 + d\eta)$ con $c = 0.63$ y $d = 0.76$. En variables reales

$$|b_{\text{Kerr}}| = \frac{1 + c\eta}{1 + d\eta} \sqrt{I_0}. \quad (4.13)$$

Figura 4.6: En el aire a 800 nm, intensidad I_0 del NBB atractor como función de la intensidad I_B del BB lineal que se generaría en propagación lineal, para dos ángulos cónicos distintos, evaluada numéricamente (línea de puntos gris) frente a la obtenida por la fórmula (4.16) (línea continua). Sobre las líneas horizontales discontinuas los NBBs están en la zona en donde domina la absorción no lineal.

Volviendo al medio con absorción, como se observó numéricamente que $(|b_{\text{in}}| + |b_{\text{out}}|)/2 \simeq |b_{\text{Kerr}}|$ para NBBs en los que la absorción no lineal no es dominante (I_0 no muy cerca de $I_{0,\text{max}}$), podemos escribir,

$$|b_{\text{out}}| + |b_{\text{in}}| = 2 \frac{1 + c(2n_2 I_0 / n_0 \theta^2)}{1 + d(2n_2 I_0 / n_0 \theta^2)} \sqrt{I_0}. \quad (4.14)$$

De esta forma, combinando las ecuaciones (4.10) y (4.14) se obtienen las fórmulas aproximadas

$$|b_{\text{in,out}}| \simeq f(\eta) \sqrt{I_0} \pm \gamma^{(M)} \frac{\beta^{(M)} I_0^M}{4k_0 \theta^2 (1 + \eta) f(\eta) \sqrt{I_0}}, \quad (4.15)$$

para las componentes de Hankel entrante y saliente del NBB como funciones del ángulo cónico θ , su intensidad pico I_0 y las propiedades del medio.

Como nuestra ley de conservaci3n afirma que $|b_{\text{in}}| \simeq \sqrt{I_B}$, podemos poner

$$\sqrt{I_B} \simeq f(\eta) \sqrt{I_0} + \gamma^{(M)} \frac{\beta^{(M)} I_0^M}{4k_0 \theta^2 (1 + \eta) f(\eta) \sqrt{I_0}}, \quad (4.16)$$

relacionando finalmente la intensidad I_B del BB lineal que crea el generador de BBs con la intensidad I_0 del NBB atractor de la dinámica que subyace en la propagaci3n en la zona de Bessel. Como ejemplo, en la figura 4.6 se muestra que los valores de I_0 que devuelve la ecuaci3n (4.16) para NBBs en aire a 800 nm, dos ángulos c3nicos θ , y valores crecientes de I_B , se ajustan con bastante precisi3n a los valores de las intensidades I_0 de los NBBs, obtenidos numéricamente, por debajo de la zona en donde dominan las pérdidas no lineales

Figura 4.7: (a) Ganancia, $-\text{Im}\{\kappa\}$, y (b) frecuencia de oscilación, $\text{Re}\{\kappa\}$, del modo más inestable de los NBBs a 800 nm como funciones de su ángulo cónico para varios valores de su intensidad pico I_0 . (c) y (d) representa el mismo estudio como función de la intensidad pico para varios valores de su ángulo cónico θ .

(líneas horizontales discontinuas). Incluso a intensidades enormes de $I_B = 100 \text{ TW/cm}^2$, que están claramente dentro de la zona de dominancia de la absorción no lineal, la fórmula (4.16) da estimaciones razonables de I_0 .

4.4. Distintos regímenes de propagación según la estabilidad del haz de Bessel no lineal atractor

Una vez que se ha especificado el atractor, hemos realizado un análisis de su estabilidad. Los resultados indican que existe una relación uno a uno entre el régimen de propagación estable (inestable) en la zona de Bessel detrás del axicón y la estabilidad (inestabilidad) del NBB ideal atractor frente a perturbaciones.

Un NBB, como estado estacionario no lineal, puede experimentar inestabilidad cuando se le perturba. El método más simple de estudiar su estabilidad o inestabilidad es introducir el NBB perturbado con un ruido aleatorio como condición inicial en la NSE y observar en la simulación numérica de la propagación si esta perturbación crece produciendo la descomposición del haz. Siendo un haz que “vive” en dos dimensiones transversales, puede descomponerse radialmente, fragmentarse azimutalmente, o ambas cosas a la vez. Un

método más analítico es el llamado análisis lineal de estabilidad o bajo pequeñas perturbaciones (Desyatnikov, Kivshar, y Torner 2005), en el que el estado estacionario más una pequeña modulación radial y/o azimutal se introducen en la NSE y se estudia si esta perturbación crece exponencialmente. Una explicación mas detallada de este método se expone en el Apéndice G.

En el caso de NBB fundamentales (sin vórtice), la inestabilidad radial parece ser la dominante ya que no se ha observado descomposición azimutal en los experimentos y simulaciones (Porrás et al. 2004; Polesana et al. 2006; Gaizauskas et al. 2006; Polesana et al. 2008; Couairon et al. 2013), particularmente en condiciones de introducción suave (Polesana et al. 2007). El análisis lineal de estabilidad frente a pequeñas perturbaciones radiales ha sido realizado numéricamente para valores típicos del NBB en las referencias (Porrás et al. 2004; Polesana et al. 2007). De acuerdo con el Apéndice G para el caso particular de $l = 0$, se supone una solución de la NSE (1.48) de la forma

$$A(r, z) = a(r)e^{i\psi(r)}e^{i\delta z} + \epsilon[u(r)e^{i\kappa z} + v^*(r)e^{i\kappa^* z}]e^{i\delta z} \quad (4.17)$$

es decir, un NBB más un pequeño ($\epsilon \rightarrow 0$) modo (u, v) que crece exponencialmente si $\text{Im}\{\kappa\} < 0$, además de oscilar armónicamente si $\text{Re}\{\kappa\} \neq 0$. Puesto que el modo de perturbación se supone pequeño, la introducción de la solución (4.17) en la NSE (1.48) da lugar a un problema diferencial lineal de autovalores κ y automodos (u, v) que se deduce en el Apéndice G y se ha resuelto numéricamente. Si se encuentra que existe al menos un autovalor con $\text{Im}\{\kappa\} < 0$, se deduce que el NBB considerado es inestable frente a perturbaciones radiales, al crecer exponencialmente el automodo (u, v) asociado con una ganancia exponencial $-\text{Im}\{\kappa\}$. La figura 4.7 muestra ejemplos de la ganancia exponencial $-\text{Im}\{\kappa\}$ y la frecuencia de oscilación $\text{Re}\{\kappa\}$ del modo más inestable de los NBBs estudiados en aire a 800 nm como funciones del ángulo cónico del NBB para valores fijos de su intensidad pico [figuras 4.7 (a) y 4.7 (b)] y como funciones de la intensidad para valores fijos del ángulo cónico [figuras 4.7 (c) y 4.7 (d)].

Como se hizo notar en (Polesana et al. 2008), para una intensidad fija, los NBBs tienden a estabilizarse a medida que aumenta el ángulo cónico. Según nuestros cálculos, no se observan signos de inestabilidad sobre un umbral de ángulo cónico ($\theta \sim 0.23^\circ$ en la figura 4.7), pero no se puede dar con esto una respuesta definitiva a la cuestión de la absoluta estabilización de los NBBs, debido a la dificultad del análisis. La tendencia de $-\text{Im}\{\kappa\}$ en función del ángulo cónico sugiere un decaimiento exponencial. Para intensidades crecientes con ángulo cónico fijo al principio la no linealidad Kerr hace cada vez más inestables los NBBs, pero a más altas intensidades, el crecimiento de las pérdidas no lineales tiene un efecto estabilizador opuesto. La estabilización que produce la absorción no lineal parece ser completa por encima de cierto ángulo cónico (sobre $\theta \sim 0.15^\circ$ en la figura 4.7). Es interesante observar que por debajo de este ángulo, una vez que por las pérdidas no lineales ha desaparecido el modo inestable inducido por el Kerr (y sobre $I_0 \sim 18 \text{ TW/cm}^2$), aparece un modo inestable subyacente con una oscilación de frecuencia $\text{Re}\{\kappa\}$ diferente que acaba siendo dominante.

A la luz de este breve análisis de estabilidad de los NBBs ideales, pueden entenderse la propagación de los BB reales detrás del elemento generador. En conexión con las figuras

Figura 4.8: En el aire a 800 nm, intensidad sobre el eje $r = 0$, I , frente a la distancia de propagación z del NBB ideal perturbado, de intensidad pico de $I_0 = 14 \text{ TW/cm}^2$, para un ángulo cónico de (a) $\theta = 0.075^\circ$ y (b) $\theta = 0.05^\circ$. (c) y (d) Espacios de fases $(I, dI/dz)$ correspondientes para $z \in [400, 3000]$ cm (empezando en el régimen de altas perturbaciones). (e) y (f) Espacios de fases correspondientes a todo el rango de propagación, $z \in [0, 12000]$ cm. Las líneas discontinuas localizan el atractor.

Figura 4.9: (a) Intensidad sobre el eje $r = 0$ (línea continua) en el aire a 800 nm después de que un haz gaussiano de $w = 2.5 \text{ cm}$ e intensidad $I_G = 0.02146 \text{ TW}/\text{cm}^2$ ilumine un axicón de $\theta = 0.075^\circ$. En la propagación lineal (curva discontinua) la intensidad del BB sería de $I_B = 10.508 \text{ TW}/\text{cm}^2$ (línea discontinua horizontal) en $z_B = 955 \text{ cm}$, de forma que el NBB atractor estaría definido por $I_0 = 14 \text{ TW}/\text{cm}^2$ (línea continua horizontal) y $\theta = 0.075^\circ$. (b) Lo mismo que en (a), excepto que $\theta = 0.05^\circ$ y $I_G = 0.03113 \text{ TW}/\text{cm}^2$. En la propagación lineal el BB de intensidad $I_B = 10.165 \text{ TW}/\text{cm}^2$ se formaría en $z_B = 1432 \text{ cm}$, de forma que el NBB atractor estaría definido por $I_0 = 14 \text{ TW}/\text{cm}^2$ y $\theta = 0.05^\circ$. (c) Espacio de fases $(I, dI/dz)$ sobre la región focal del axicón en el caso (a). (d) Espacio de fases a lo largo de toda la propagación en el caso (b). Las líneas discontinuas en (c) y (d) localizan el atractor.

4.4 (a) y 4.5 (a), el régimen estable de propagación después del axicón puede asociarse con la estabilidad del NBB atractor con $I_0 = 28 \text{ TW/cm}^2$ y $\theta = 0.15^\circ$ que tiende a formarse en el centro de la zona de Bessel, i. e., con la ausencia de modos inestables de este atractor en el análisis de estabilidad linealizado, como puede verse en la figura 4.7 (c) para la ganancia exponencial. Aunque se observen repetidos ciclos de autofocalización (las pequeñas ondulaciones antes del centro de la zona de Bessel del axicón o antes de $z = 0$ en el haz de Bessel-Gauss) para estos pequeños ángulos cónicos (ciclos que pueden ser mucho más pronunciados), la radiación entrante es empujada de manera robusta hacia el NBB sobre el centro de la zona de Bessel. En las figuras 4.4 (c) y 4.5 (b), en cambio, el (débil) régimen inestable parece reflejar la inestabilidad del NBB atractor con $I_0 = 12 \text{ TW/cm}^2$ y $\theta = 0.15^\circ$, como puede verificarse en la figura 4.7 (c) para su ganancia exponencial. La ganancia es de hecho baja comparada con la de otros NBBs en la misma figura. El hecho de que el NBB con $I_0 = 12 \text{ TW/cm}^2$ y $\theta = 0.15^\circ$ está actuando como atractor, y por tanto determinando la dinámica, es que las oscilaciones que se observan a partir del centro de la zona de Bessel del axicón [figura 4.4 (c)] o a partir de la cintura $z = 0$ del haz de Bessel-Gauss [figura 4.5 (b)] tienen una frecuencia que coincide con la frecuencia $\text{Re}\{\kappa\}$ del modo más inestable del NBB atractor, como puede comprobarse fácilmente en la figura 4.7 (d).

La conexión entre el régimen inestable detrás del axicón y la inestabilidad del NBB atractor es más evidente en condiciones de gran inestabilidad. Para dos NBBs ideales inestables, el primero con menos ganancia exponencial y el segundo con más, las figuras 4.8 (a) y (b) representan la intensidad en su centro ($r = 0$) en función de la distancia z de propagación, y muestran el crecimiento de los respectivos modos inestables dominantes. En estas simulaciones, los NBBs son directamente lanzados al medio y se encuentra que los modos inestables dominantes de cada NBB emergen espontáneamente del ruido numérico con la ganancia y la frecuencia de oscilación predicha por el análisis de estabilidad linealizado [izquierda de las figuras 4.8 (a) y 4.8 (b)]. Estos modos pequeños se desarrollan en regímenes de altas perturbaciones periódicos (pero no armónicos) que gradualmente se transforman en cuasiperiódicos y finalmente caóticos. En todos los casos estudiados, este proceso resulta ser más rápido cuando la ganancia $-\text{Im}\kappa$ que desencadena el proceso es mayor, como se ve al comparar las figuras 4.8 (a) y 4.8 (b). También, la frecuencia de oscilación en el régimen de altas perturbaciones es próxima pero ligeramente menor que $\text{Re}\kappa$.

En las figuras 4.8 (c) y (f) se muestran los espacios de fase $(I, dI/dz)$ (I es el valor de la intensidad en el centro o eje del haz) en intervalos de propagación relevantes. En el caso del NBB de menor ganancia, el régimen de altas perturbaciones se mantiene periódico por una distancia de propagación considerable [figura 4.8 (c)], mientras en el caso del NBB de mayor ganancia es cuasiperiódico desde el principio del régimen de altas perturbaciones [4.8 (d)] y llega a ser aparentemente caótico más rápidamente. Los espacios de fases hasta la mayor distancia de propagación [figuras 4.8 (e) y 4.8 (f)] parecen evidenciar que los NBBs son atractores extraños con una morfología que depende del NBB específico.

Por otra parte, las figuras 4.9 (a) y (b) muestran las intensidades en el eje del haz después de iluminar un axicón con dos haces gaussianos de anchuras e intensidades tales que los atractores son los mismos dos NBBs ideales analizados anteriormente. En el caso

de la figura 4.9 (a), correspondiente al NBB atractor de menor ganancia, la frecuencia de oscilación alrededor del foco del axicón coincide con la del régimen periódico de altas perturbaciones. Más aún, la estructura de las oscilaciones en el espacio de fases alrededor del foco del axicón de la figura 4.9 (c) reproduce la estructura de las oscilaciones inarmónicas del régimen periódico de perturbaciones del NBB atractor de la figura 4.8 (c). Las pequeñas diferencias son debidas al suave decaimiento de intensidad que experimenta el BB de potencia finita a lo largo de la zona de Bessel. La estructura del espacio de fases en toda la zona de Bessel (no mostrada) no reproduce la morfología del atractor extraño en la figura 4.8 (e), debido a que la zona de Bessel termina antes de que el caos se pueda desarrollar. En el caso de la figura 4.9 (b), de mayor ganancia, la intensidad en el eje en una parte considerable de la zona de Bessel, exhibe una dinámica mucho más desordenada. Una comparación entre la morfología del espacio de fases de la figura 4.9 (d) para toda la zona de Bessel con la del NBB atractor de la figura 4.8 (f) evidencia que la dinámica después del axicón está reproduciendo la dinámica caótica que manifiesta el NBB ideal atractor.

4.5. Conclusión

Estas simulaciones numéricas de la propagación de BB reales, generados principalmente por axicones, evidencian que tanto el régimen llamado estable después del axicón como el llamado inestable están determinados por la existencia de un NBB ideal atractor. En el régimen estable, este era un hecho aceptado previamente, aunque el NBB atractor no habia sido identificado. En cambio, no existía ninguna explicación sobre la causa del regimen inestable mas allá de su pura descripción. En este capítulo, se ha hecho la hipótesis de que en ambos casos existe un NBB atractor y se ha identificado (incluso dando una formula analítica para su determinación). Esta hipótesis ha sido corroborada al observar numéricamente que en el régimen estable en la zona Bessel el NBB atractor es estable frente a pequeñas perturbaciones y se forma de hecho en la zona de Bessel, y en el régimen inestable en la zona de Bessel el NBB atractor es inestable, observándose entonces el desarrollo de su inestabilidad, desde el régimen de pequeñas perturbaciones hasta su desenvolvimiento en grandes oscilaciones periódicas, cuasi-periódicas y caóticas.

CONCLUSIONES

En esta memoria se han encontrado los haces de luz no lineales que se forman espontáneamente en la propagación de haces lineales de Airy y de Bessel introducidos en medios no lineales con absorción no lineal. Estos son los llamados haces de Airy no lineales y haces de Bessel no lineales, no difractantes y resistentes a la absorción. Mediante el análisis de las amplitudes de las componentes de Hänkel de estos haces en la propagación, se ha encontrado una ley de conservación oculta en la dinámica no lineal no demostrada hasta ahora: la amplitud de la componente de Hänkel entrante se conserva en la evolución. Esto ha conllevado la resolución de un problema que permanecía sin resolver en la literatura, el llamado problema de selección, o la determinación exacta del haz de Airy no lineal o NBB que se forma espontáneamente en la propagación del haz lineal incidente. Se ha caracterizado este estado, atractor de esta dinámica no lineal, y en el caso del BB fundamental generado por una lente de tipo axicón se presenta una fórmula analítica que lo define.

Se comprueba también el mecanismo de estacionariedad que hace que los haces ideales conserven el perfil de intensidad transversal en la propagación, aún existiendo absorción no lineal. Este régimen de propagación estacionaria se explica por el reflujo de energía que se produce desde las colas de los haces hasta los lóbulos interiores, en donde hay más pérdidas debidas a la absorción no lineal, desde un reservorio de potencia infinita. Gracias a este proceso se va rellenando la potencia que se pierde en la parte más intensa de los haces. Este mecanismo, que ya había sido explicado en el caso de los haces de Bessel sin vórtice, cuyo flujo de potencia era puramente radial, es presentado aquí para el caso de los haces de Bessel con vórtice, cuyo flujo de potencia adquiere una forma espiral, evidenciando que estos haces pueden actuar intercambiando momento angular con la materia.

En el caso real de los haces de Airy o de Bessel de potencia finita, que se pueden crear en los laboratorios, se encuentra un comportamiento que reproduce las propiedades de conservación y el carácter estacionario del caso ideal, si bien el régimen que se observa cuando se trabaja con estos haces reales es solamente cuasi-estacionario, por ser limitado el aporte de potencia por parte del reservorio. Se comprueba que, según la configuración experimental utilizada, el haz lineal introducido en el medio alcanza o no el correspondiente haz atractor de la dinámica estudiado en el caso ideal. La llamada introducción “suave” en el medio, cuando el haz lineal no está todavía formado, es la más propicia para la formación del haz atractor. En la llamada introducción “abrupta”, sin embargo, cuando el haz lineal entra en el medio cuando está totalmente formado, el haz se disipa antes de alcanzar el atractor no lineal. No obstante, se observa que el haz no lineal que hemos

identificado en este trabajo como atractor de la dinámica sigue actuando como tal en cualquiera de las dos disposiciones experimentales. De esta forma, nuestro estudio explica muchos comportamientos que habían sido simplemente descritos en la literatura sin explicación de la ley dinámica de conservación que estaba detrás de la propagación no lineal.

Se ha comprobado exhaustivamente la validez de nuestra ley de conservación y la identificación del haz no lineal atractor en el caso de los haces de Bessel fundamentales en introducción suave que son generados por lentes de tipo axicón. Se han observado dos regímenes detrás del axicón, uno cuasi-estacionario y otro con grandes oscilaciones periódicas, cuasi-periódicas e incluso sin ninguna periodicidad aparente (pudiendo ser consideradas caóticas en un sentido amplio). Habiendo identificado el atractor, y habiendo realizado un análisis de su estabilidad bajo pequeñas perturbaciones, hemos comprobado que el primero se corresponde con estabilidad del NBB atractor y el segundo con inestabilidad del mismo. Este hecho da una explicación unificada a los distintos comportamientos observados experimentalmente en la propagación de estos haces, demostrando que todos ellos no son sino manifestaciones de las propiedades de estabilidad del atractor identificado al que tienden los haces lineales en la dinámica no lineal.

Como líneas de investigación abiertas para un futuro cercano cabe destacar la caracterización rigurosa del caos en este sistema tan complejo, dado que en los estados estacionarios, periódicos, semi-periódicos o caóticos encontrados no ha sido posible de momento estudiar exhaustivamente algún marcador de caos que nos ayudara a ratificar nuestras intuiciones al respecto, entre otras cosas por la dificultad de las simulaciones numéricas con ecuaciones en derivadas parciales no lineales (hemos esbozado el análogo a un diagrama de bifurcaciones para un sistema continuo pero de momento no se pueden sacar conclusiones decisivas). Por otra parte, queda pendiente el análisis de estabilidad de los haces de Airy y actualmente se está desarrollando en el grupo un análisis de estabilidad de los haces de Bessel con vórtice incluyendo su estabilidad azimutal.

Apéndices

Apéndice A

Cálculo de la solución de Airy de la ecuación de Schrödinger lineal

A.1. Haz de Airy ideal

Buscamos una solución analítica de la LSE unidimensional (2.8),

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}, \quad (\text{A.1})$$

cuyo desarrollo en el espacio de Fourier tendrá la forma

$$A(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[A](k) e^{-i\frac{k^2}{2}\zeta} e^{-ik\xi} dk, \quad (\text{A.2})$$

con

$$\mathcal{F}[A](k) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \zeta = 0) e^{ik\xi} d\xi. \quad (\text{A.3})$$

Suponiendo como condición inicial el haz de Airy en su forma compleja (Olver 2010)

$$A(\xi, \zeta = 0) = \text{Ai}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-i\left(\frac{k'^3}{3} + k'\xi\right)}, \quad (\text{A.4})$$

su transformada de Fourier resulta ser simplemente una fase cúbica

$$\mathcal{F}[A](k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{k'^3}{3} + k'\xi\right)} e^{ik\xi} dk' d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k'^3}{3}} \delta(k - k') dk' = 2\pi e^{-i\frac{k^3}{3}}, \quad (\text{A.5})$$

que introducida en (A.2) nos da la solución de la LSE (A.1):

$$A(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k^3}{3}} e^{-i\frac{k^2}{2}\zeta} e^{-ik\xi} dk. \quad (\text{A.6})$$

Se trata ahora de relacionar la expresión anterior con la función de Airy. Si definimos las funciones $\tilde{k} \equiv k + A(\xi, \zeta)$, $\tilde{\xi} \equiv \xi + B(\xi, \zeta)$ y $C(\xi, \zeta)$ de forma que

$$A(\xi, \zeta) = \text{Ai}(\tilde{\xi}) e^{iC(\xi, \zeta)} = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-i\frac{(k+A)^3}{3}} e^{-i(k+A)(\xi+B)} e^{iC(\xi, \zeta)}, \quad (\text{A.7})$$

igualando los exponentes en (A.7) y (A.6) tenemos

$$\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2}\zeta + k\xi = \frac{\tilde{k}^3}{3} + \tilde{k}\tilde{\xi} - C = \frac{(k+A)^3}{3} + (k+A)(\xi+B) - C, \quad (\text{A.8})$$

obteniendo así un polinomio de segundo grado en k . Igualando los términos en k^2 , k^1 y k^0 obtenemos

$$A = \frac{\zeta}{2}, \quad (\text{A.9})$$

$$B = -\frac{\zeta^2}{4}, \quad (\text{A.10})$$

$$C = -\frac{\zeta^3}{12} + \frac{\zeta\xi}{2}, \quad (\text{A.11})$$

y, por tanto,

$$A(\xi, \zeta) = \text{Ai}(\xi - \zeta^2/4) e^{i\left(\frac{\zeta\xi}{2} - \frac{\zeta^3}{12}\right)}, \quad (\text{A.12})$$

como se quería demostrar.

A.2. Haz de Airy apodizado

Si en lugar de (A.4) suponemos como condición inicial un Airy apodizado, de la forma

$$A(\xi, \zeta = 0) = \text{Ai}(\xi) e^{\gamma\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-i\left(\frac{k'^3}{3} + k'\xi\right)} e^{\gamma\xi}, \quad (\text{A.13})$$

su transformada de Fourier será en este caso aproximadamente una gaussiana modulada por una fase cúbica,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{k'^3}{3} + k'\xi\right)} e^{\gamma\xi} e^{ik\xi} dk' d\xi = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k'^3}{3}} \delta(k - i\gamma - k') dk' = 2\pi e^{-i\frac{(k-i\gamma)^3}{3}} = 2\pi e^{-\gamma k^2} e^{-\frac{i}{3}(k^3 - 3\gamma^2 k + i\gamma^3)}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

y, por tanto, la solución de la LSE será

$$A(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma k^2} e^{-\frac{i}{3}(k^3 - 3\gamma^2 k + i\gamma^3)} e^{-i\frac{k^2}{2}\zeta} e^{-ik\xi} dk. \quad (\text{A.15})$$

Si de nuevo se intenta buscar la forma de la fase de las componentes espectrales de la función de Airy (A.4), $\tilde{k}^3/3 + \tilde{\xi}\tilde{k}$ con $\tilde{k} \equiv k + A(\xi, \zeta)$ y $\tilde{x} \equiv x + B(\xi, \zeta)$ y se admite una fase $C(\xi, \zeta)$, igualando los exponentes de (A.7) y la solución general (A.15), se obtiene

$$\begin{aligned} &-i\gamma k^2 + \frac{k^3}{3} - k\gamma^2 + i\frac{\gamma^3}{3} + \frac{k^2}{2}z + kx = \\ &= \frac{k^3}{3} + k^2 A + kA^2 + \frac{A^3}{3} + kx + kB + Ax + AB - C, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Figura A.1: Perfiles transversales de intensidad, $|A(\xi, \zeta)|^2$, en (A.20) para distintos valores de la coordenada de propagación, ζ .

obteniendo, una vez igualados los términos en k^2 , k^1 y k^0 ,

$$A = \frac{\zeta}{2} - i\gamma \quad (\text{A.17})$$

$$B = -\frac{\zeta^2}{4} + i\zeta\gamma \quad (\text{A.18})$$

$$C = -\frac{\zeta^3}{12} + \frac{\gamma^2\zeta}{2} + \frac{\zeta\xi}{2} + i\frac{\zeta^2\gamma}{2} - i\gamma\xi, \quad (\text{A.19})$$

con lo que se llega a la expresión

$$A(\xi, \zeta) = \text{Ai}\left(\xi - \frac{\zeta^2}{4} + i\gamma\zeta\right) e^{i\left(\frac{\zeta\xi}{2} - \frac{\zeta^3}{12}\right)} e^{\gamma\left(\xi - \frac{\zeta^2}{2} + i\frac{\gamma\zeta}{2}\right)}, \quad (\text{A.20})$$

como se quería demostrar. En la figura A.1 se muestran distintos perfiles de intensidad, $|A(\xi, \zeta)|^2$, para distintos valores de la coordenada de propagación.

Cálculo de los perfiles transversales de los haces de Airy no lineales estacionarios

B.1. Sistema de ecuaciones

Lo primero que hacemos es convertir el sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2 a}{du^2} = ua + \left(\frac{d\psi}{du} \right)^2 a - 2\alpha a^3, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d^2 \psi}{du^2} = -\frac{2}{a} \frac{d\psi}{du} \frac{da}{du} - 2a^{2M-2}, \quad (\text{B.2})$$

en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden por medio de las asignaciones:

$$x_1 \equiv a, \quad x_2 \equiv \frac{da}{du}, \quad x_3 \equiv \psi, \quad x_4 \equiv \frac{d\psi}{du}, \quad (\text{B.3})$$

quedando

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{du} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{du} &= ux_1 + x_4^2 x_1 - 2\alpha x_1^3, \\ \frac{dx_3}{du} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{du} &= -2 \frac{x_2 x_4}{x_1} - 2x_1^{2M-2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2. Implementación en MATLAB

Realizamos la integración con uno de los solucionadores de ecuaciones diferenciales ordinarias de MATLAB imponiendo condiciones iniciales en un punto $u_0 \gg 0$ de forma

que su valor sea el Airy lineal con fase no lineal nula multiplicado por el parámetro de intensidad a_0 , es decir,

$$x_{1,0} = a_0 \text{Ai}(u_0), \quad x_{2,0} = a_0 \frac{d\text{Ai}}{du}(u_0), \quad x_{3,0} = 0, \quad x_{4,0} = 0. \quad (\text{B.5})$$

A continuación detallamos un par de listados de alguno de los códigos utilizados para este propósito en nuestro trabajo.

stationaryAiry.m

```
% Parámetros físicos
alpha = 0.5; M = 4;

% Punto inicial
u0 = 10;

% Parámetro de amplitud del haz
a0 = 1.6;

% Condiciones iniciales
a10 = a0*airy(0,u0);
a20 = a0*airy(1,u0);
a30 = 0;
a40 = 0;

% Paso de cálculo
paso = 40/1000;

% Vectores iniciales
uspan = linspace(u0,-30,round((30+u0)/paso));
azero = [a10; a20; a30; a40];

% Llamada a solucionador ode45 mediante
% la función eqsAiryStationary
options = odeset('reltol', 100*eps, 'abstol', a10/1000);
[u,a] = ode45(@eqsAiryStationary,uspan,azero,options,alpha,M);
%%
```

eqsAiryStationary.m

```
% Definición del sistema de EDOs
function dxdu = eqsAiryStationary(u,x,alpha,M)
dxdu = [x(2);...
        u*x(1)+x(4)^2*x(1)-2*alpha*x(1)^3;...
        x(4);...
        -2*x(2)*x(4)/x(1)-2*x(1)^(2*M-2)];
end
```

Apéndice C

Split Step Fourier Method

En general, el problema a resolver será el de la propagación no lineal de un haz de luz de constante de propagación k_0 en el régimen paraxial cuya envolvente compleja A cumple una ecuación no lineal en derivadas parciales del tipo

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} A + ik_0 \Delta n A, \quad (\text{C.1})$$

donde Δn incluye todos los efectos no lineales (Kerr, absorción no lineal,...), es decir, $n_0 \mapsto n_0(1 + \Delta n)$. El problema se reescribe en términos de operadores diferenciales de la forma siguiente:

$$\text{Operadores del SSFM} \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{L} + \hat{N})A \\ \hat{L} \equiv \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} \longrightarrow \text{Operador lineal (difracción)} \\ \hat{N} \equiv ik_0 \Delta n \longrightarrow \text{Operador no lineal (Kerr, absorción no lineal, ...).} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Por tanto, formalmente, la propagación debe cumplir la relación $A(x, y; z + \Delta z) = \exp[(\hat{L} + \hat{N})\Delta z]A(x, y; z)$, y si usamos la fórmula de Campbell-Hausdorff (Jacobson 1962)

$$e^{\hat{N}\Delta z} e^{\hat{L}\Delta z} = e^{\hat{N}\Delta z + \hat{L}\Delta z + \frac{1}{2}[\hat{N}, \hat{L}]\Delta z^2 + \dots}, \quad (\text{C.3})$$

si Δz es pequeño, se puede aproximar $e^{\hat{N}\Delta z + \hat{L}\Delta z} \simeq e^{\hat{N}\Delta z} e^{\hat{L}\Delta z}$, lo que equivale a aplicar la propagación debida a los efectos lineales y a los efectos no lineales consecutivamente. En la práctica, para un recorrido L , esto lo podremos hacer asegurando que el paso sea suficientemente pequeño, $\Delta z = h$, de forma que siempre podamos dividir el recorrido de forma que $h = L/N$ y aplicar la evolución iterada

$$A(x, y; z + L) = e^{\hat{N}h} e^{\hat{L}h} \dots N \text{ veces} \dots e^{\hat{N}h} e^{\hat{L}h} A(x, y; z). \quad (\text{C.4})$$

Este método aproxima la propagación con un error que disminuye como h^2 cuando $h \rightarrow 0$ (Agrawal 2001). Una variante que lo mejora es el método simetrizado, puesto que no hay ninguna razón para aplicar el operador lineal primero y el no lineal después. En él la evolución no lineal o lineal se aplica alternativamente en los centros de los intervalos mediante la fórmula

$$A(x, y; z + L) = \dots N \text{ veces} \dots e^{\hat{N}h/2} e^{\hat{L}h} e^{\hat{N}h/2} e^{\hat{L}h/2} e^{\hat{N}h} e^{\hat{L}h/2} A(x, y; z). \quad (\text{C.5})$$

Con este método, el error disminuye como h^3 .

El hecho es que podemos separar el cálculo de las dos evoluciones, de modo que la evolución no lineal, que se reduce a una ecuación diferencial ordinaria (si los términos no lineales no contienen derivadas en x e y) se hace numéricamente utilizando un método de Runge-Kutta, y el lineal por técnicas de Fourier. Si la transformada de Fourier bidimensional es

$$\mathcal{F}[A] = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy, \quad (\text{C.6})$$

y la inversa

$$A = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[A]\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[A] e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (\text{C.7})$$

la ecuación lineal $\partial A / \partial z = (i/2k_0) \Delta_{\perp} A$ en el espacio de Fourier queda

$$\frac{\partial \mathcal{F}[A]}{\partial z} = \frac{-i}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \mathcal{F}[A] \quad (\text{C.8})$$

de donde

$$A(x, y; z + h) = e^{\hat{L}h} A(x, y; z) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\frac{i}{2k_0}(k_x^2 + k_y^2)h} \mathcal{F}[A]\}. \quad (\text{C.9})$$

Propagación de haces de Airy no lineales mediante el Split Step Fourier Method

En el caso de los haces de Airy, la ecuación de evolución en el sistema móvil es

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial A}{\partial u} + i\alpha |A|^2 A - |A|^{2M-2} A. \quad (\text{D.1})$$

D.1. Solución de la parte lineal

Para solucionar la parte lineal escogemos el método de la transformada de Fourier. Más concretamente con MATLAB utilizamos el algoritmo FFT (transformada rápida de Fourier). Para ello observamos que la parte lineal de (D.1) queda

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial A}{\partial u} \quad (\text{D.2})$$

(hemos quitado las tildes de la amplitud A por comodidad). Definiendo la transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}[A](k_u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} A(u, v) e^{ik_u u} du \equiv \tilde{A}(k_u, v), \quad (\text{D.3})$$

se tiene

$$A(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k_u, v) e^{-ik_u u} dk_u, \quad (\text{D.4})$$

que sustituida en (D.2) proporciona

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial v} = -\frac{i}{2} (k_u^2 + vk_u) \tilde{A}. \quad (\text{D.5})$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int_v^{v+h} \frac{d\tilde{A}}{\tilde{A}} &= -\frac{i}{2} \int_v^{v+h} (k_u^2 + vk_u) dv \\ \ln \left[\frac{\tilde{A}(v+h)}{\tilde{A}(v)} \right] &= -\frac{i}{2} \left[k_u^2 v + k_u \frac{v^2}{2} \right]_v^{v+h} = -\frac{i}{2} \left[k_u^2 h + \frac{k_u}{2} h^2 + k_u v h \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

luego la transformada de la parte lineal evolucionará como

$$\tilde{A}(v+h) = \tilde{A}(v)e^{-\frac{i}{2}[k_u^2 h + k_u v h + \frac{k_u}{2} h^2]}, \quad (\text{D.7})$$

y sólo hará falta tomar la transformada inversa para tener la onda propagada linealmente una cantidad h .

D.2. Solución analítica de la parte no lineal

La parte no lineal de la ecuación (2.14) será

$$\frac{\partial A}{\partial v} = i\alpha|A|^2 A - |A|^{2M-2} A. \quad (\text{D.8})$$

Suponiendo una onda genérica de amplitud a y fase ϕ ($A = ae^{i\phi}$) quedan las ecuaciones

$$\frac{\partial a}{\partial v} = -a^{2M-1} \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \alpha a^2. \quad (\text{D.10})$$

De (D.9) llegamos a

$$\int_{a(v)}^{a(v+h)} \frac{da}{a^{2M-1}} = -h, \quad (\text{D.11})$$

consiguiendo la expresión para la amplitud

$$a(v+h) = \frac{a(v)}{[1 + h(2M-2)a(v)^{2M-2}]^{\frac{1}{2M-2}}}. \quad (\text{D.12})$$

En el caso de la fase de (D.10) se deduce

$$\phi(v+h) = \phi(v) + \alpha \int_v^{v+h} a^2 dh, \quad (\text{D.13})$$

que con (D.12) y definiendo $y \equiv 1 + h(2M-2)a(v)^{2M-2}$ queda

$$\phi(v+h) = \phi(v) + \frac{\alpha}{(2M-2)a(v)^{2M-4}} \int_1^y \frac{dy}{y^{\frac{1}{M-1}}}, \quad (\text{D.14})$$

que integrada arroja la expresión para la fase

$$\phi(v+h) = \phi(v) + \frac{\alpha}{2(M-2)a(v)^{2M-4}} \left\{ [1 + h(2M-2)a(v)^{2M-2}]^{\frac{M-2}{M-1}} - 1 \right\}, \quad (\text{D.15})$$

proveyendo para ello que $M > 2$, lo cual ocurre en todos los medios estudiados.

D.3. Implementación en MATLAB

Al implementar la evolución numérica, debemos tener la precaución de asegurarnos de corregir los efectos de borde propios del método FFT. Para ello tenemos en cuenta que los efectos no lineales son más fuertes en los lóbulos más intensos de la onda, que se encuentran cerca del eje principal, y tanto para coordenadas u muy positivas como para coordenadas u muy negativas estos efectos serán despreciables y no llegarán a producirse. Por tanto podemos reemplazar estos dos tramos de los extremos del haz por la solución lineal sin pérdida de generalidad, asegurándonos una suficientemente ancha ventana computacional.

Por otra parte, para hacer este desarrollo en MATLAB, tendremos que cambiar el signo a la cantidad k_u en (D.7), dado que el convenio de la transformada de Fourier es el opuesto al que utilizamos nosotros. A continuación damos un ejemplo de implementación.

```
function []=airy_propagation()

% Parámetros físicos
alpha = 0.5; M = 4;
% Parámetro de amplitud del haz de Airy
a0 = 2;

% Parámetros numéricos de X
umin=-200; % el mínimo de la ventana computacional
umax=20; % el máximo de la ventana computacional
N=2^nextpow2(5000);
x=linspace(umin,umax,N);% vector en x de N puntos

% Factor de reemplazo
factor=0.025;
loc= (x<=(1-factor)*umin) | (x>=(1-factor)*umax);

% Distancia de propagación
Z=25;
dz = 1/(3000);
v_z=0:dz:Z; % vector en Z

% Vectores para FFT
L=umax-umin;
dx=L/(N-1);
dk=2*pi/(N*dx);
Kx1=dk*[0:N/2-1];
Kx2=dk*[-(N/2):-1];
Kx=[Kx1 Kx2];

% Haz inicial
Airy_ini=a0*airy(x);
```

```

% Intensidad del haz
loc2= (x>=-25) & (x<=2);
int=Airy_ini(loc2).^2;
x2=x(loc2);

% Se archiva el perfil de intensidad inicial
archivo=sprintf('initial%.02f.dat',a0);
fid=fopen(archivo,'w');
fprintf(fid, '%f %f\n', [x2;int]);
fclose(fid);

% Bucle principal de propagación
Airy=Airy_ini;
for z=v_z
    % Reemplazo del airy lineal en extremos
    Airy_lineal = a0*airy(x).*exp(j*(z^3/24)+j*(x*z/2));
    Airy(loc)=Airy_lineal(loc);

    % Definición de operadores lineales
    D2=exp(-j/2*(Kx.^2-Kx*z)*(dz/2)-j/2*(-Kx./2)*(dz/2)^2);
    D4=exp(-j/2*(Kx.^2-Kx*z)*(dz/4)-j/2*(-Kx./2)*(dz/4)^2);

    % Primera aplicación del SSFM
    % Se llama a la solución analítica
    % de la parte no lineal, "pasoNoLineal"
    Airy = ifft(D4.*fft(Airy));% L >> dz/4
    [Airy]=pasoNoLineal(Airy,alpha,M,dz/2); % NL >> dz/2
    Airy = ifft(D4.*fft(Airy));% L >> dz/4

    % Segunda aplicación del SSFM
    [Airy]=pasoNoLineal(Airy,alpha,M,dz/4); % NL >> dz/4
    Airy = ifft(D2.*fft(Airy));% L >> dz/2
    [Airy]=pasoNoLineal(Airy,alpha,M,dz/4); % NL >> dz/4
    %%
end
% fin del bucle de propagación

% Se archiva el perfil de intensidad
% del Airy en propagación lineal
archivo=sprintf('linear%.02f%.02f.dat',a0,z);
int=abs(Airy_lineal).^2;
fid=fopen(archivo,'w');
fprintf(fid, '%f %f \n', [x;int]);
fclose(fid);

```

```
% Se archiva el perfil de intensidad
% del Airy en propagación no lineal
archivo=sprintf('nonlinear%.02f%.02f.dat',a0,z);
int=abs(Airy).^2;
fid=fopen(archivo,'w');
fprintf(fid, '%f %f\n', [x;int]);
fclose(fid);

end

% Solución analítica de la parte no lineal
function [Airy]=pasoNoLineal(Airy,alpha,M,h)

    % Fórmula para el módulo de la envolvente
    modulo = abs(Airy)./(1+(2*M-2).*...
        ...abs(Airy).^(2*M-2).*h).^(1/(2*M-2));

    % Fórmula para la fase de la envolvente
    phase = angle(Airy)+...
        ...alpha./(2.*(M-2).*abs(Airy).^(2*M-4)).*...
        ...((1+(2*M-2).*abs(Airy).^(2*M-2).*h).^((M-2)/(M-1))-1);
    Airy = modulo .* exp(1i*phase);

end
```

Apéndice E

Cálculo de los perfiles radiales de los haces de Bessel no lineales estacionarios

E.1. Sistema de ecuaciones

Partimos de las ecuaciones (3.19) y (3.20) presentadas en el capítulo 3:

$$\frac{d^2 \tilde{a}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{a}}{d\rho} - \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \tilde{a} + \tilde{f}(\tilde{a}^2) \tilde{a} - \text{sgn}(\delta) \tilde{a} - \frac{l^2}{\rho^2} \tilde{a} = 0, \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + 2 \frac{d\psi}{d\rho} \frac{d\tilde{a}}{d\rho} \frac{1}{\tilde{a}} + \tilde{a}^{2M-2} = 0. \quad (\text{E.2})$$

Dado el comportamiento de la amplitud en el origen para un vórtice de carga topológica l , es útil expresar ésta como $\tilde{a} = c(\rho)\rho^l$, quedando de esta forma las anteriores ecuaciones como

$$\begin{aligned} c'' + \frac{2l+1}{\rho} c' - \psi'^2 c - \text{sgn}(\delta) c + \tilde{f}(\rho^{2l} c^2) &= 0, \\ \psi'' + \frac{2l+1}{\rho} \psi' + \frac{2\psi' c'}{c} + \rho^{l(2M-2)} c^{2M-2} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

en donde las primas corresponden a derivadas respecto a ρ . Así en esta ocasión podemos definir las variables

$$x_1 \equiv c, \quad x_2 \equiv c', \quad x_3 \equiv \psi, \quad x_4 \equiv \psi', \quad (\text{E.4})$$

que serán las que integremos en nuestro programa.

De este modo quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\frac{2l+1}{\rho} x_2 + x_4^2 x_1 + \text{sgn}(\delta) x_1 - \alpha_2 \rho^{2l} x_1^3 - \alpha_4 \rho^{4l} x_1^l, \\ x_3' &= x_4, \\ x_4' &= -\frac{2l+1}{\rho} x_4 - 2 \frac{x_4 x_2}{x_1} - \rho^{l(2M-2)} x_1^{2M-2}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

sujetas a las condiciones iniciales

$$x_{1,0} = c(0) = \frac{b_0}{2^l l!}, \quad x_{2,0} = c'(0) = 0, \quad x_{3,0} = \psi(0) = 0, \quad x_{4,0} = \psi'(0) = 0, \quad (\text{E.6})$$

de forma que $\tilde{a} = c(\rho)\rho^l = b_0 J_l(\rho)$ sería el comportamiento de la solución en torno al origen.

E.2. Implementación en MATLAB

Para implementar las ecuaciones (E.5) numéricamente hay que intentar resolver la singularidad que tienen cuando $\rho = 0$. Para ello hay que utilizar los desarrollos de Taylor en torno a ese punto,

$$\begin{aligned} c &\simeq 1 + \frac{1}{2}c''\rho^2 + \dots \Rightarrow x_2 = c' \simeq c''|_{\rho=0}\rho = x'_2\rho, \\ \psi &\simeq \frac{1}{2}\psi''\rho^2 + \dots \Rightarrow x_4 = \psi' \simeq \psi''|_{\rho=0}\rho = x'_4\rho, \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

y aplicar en torno a $\rho \simeq 0$ el sistema de ecuaciones alternativo

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= \frac{1}{2l+2}(x_4^2 x_1 + \text{sgn}(\delta)x_1 - \alpha_2 \rho^{2l} x_1^3 - \alpha_4 \rho^{4l} x_1^l) \\ x'_3 &= x_4 \\ x'_4 &= \frac{1}{2l+2} \left(-\frac{2x_4 x_1}{x_1} - \rho^{l(2M-2)} x_1^{2M-2} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

A continuación detallamos los códigos utilizados para este propósito en nuestro trabajo.

BesselVortex.m

```
% Parámetros físicos
l = 2; M = 4
alpha1 = 4;
alpha2 = 0;
signo = -1;
abs = 1; % abs=0 apaga la absorción

% Parámetro de amplitud del BB
b0 = 1;

% Condiciones de contorno
c10 = b0/2^l/factorial(l);
c20 = 0;
```

```

c30 = 0;
c40 = 0;

% Primer paso pequeño de integración con ode45
% y función "eqsBesselVortexInitial"
rspan = [0,1e-8];
czero = [c10; c20; c30; c40];
options = odeset('reltol',1e-8);
[r0,c0] = ode45(@eqsBesselVortexInitial,rspan,czero,...
    ...options,l,M,alpha1,alpha2,signo,abs);

% Resto de integracion con ode45
% y función "eqsBesselVortex"
czero = [c0(end,1); c0(end,2); c0(end,3); c0(end,4)];
rspan = linspace(1e-8,40,1000);
[r,c] = ode45(@eqsBesselVortex,rspan,czero,options,...
    ...l,M,alpha1,alpha2,signo,abs);

% Definición de amplitud obtenida
rfull = [r0;r];
cfull = [c0;c];
afull = cfull;
amplitud = rfull.^l.*afull(:,1);

% Posible gráfica de perfil de intensidad
figure;
p1=plot(rfull,amplitud.^2);
%%

```

eqsBesselVortex.m

```

% Definición de ODEs a partir del segundo paso
function dxdr = eqsBesselVortex(r,x,l,M,alpha1,alpha2,...
    ...signo,abs)
dxdr = [x(2);
    -(2*l+1)/r*x(2)+x(4)^2*x(1)+signo*x(1)...
    ...-alpha1*r^(2*l)*x(1)^3...
    ...-alpha2*r^(4*l)*x(1)^5;
    x(4);...
    -(2*l+1)/r*x(4)-2*x(4)*x(2)/x(1)...
    ...-abs*r^(2*l*(M-1))*x(1)^(2*(M-1))];
%%

```

eqsBesselVortexInitial.m

```
% Definición de ODEs en el primer paso
function dxdr = eqsBesselVortexInitial(r,x,l,M,alpha1,...
                                         ...alpha2,signo,abs)
dxdr = [x(2);
        (x(4)^2*x(1)+signo*x(1)-alpha1*r^(2*l)*x(1)^3...
        ...-alpha2*r^(4*l)*x(1)^5)/(2*l+2);
        x(4);...
        (-2*x(4)*x(2)/x(1)...
        ...-abs*r^(2*l*(M-1))*x(1)^(2*(M-1)))/(2*l+2)];
%%
```

Apéndice F

Sobre la carga topológica

F.1. Definición

La carga topológica de un vórtice, cuya amplitud compleja escribimos en términos de su amplitud y su fase como $A = ae^{i\theta}$, está definida como (Desyatnikov, Kivshar, y Torner 2005)

$$\text{carga topológica} = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l}, \quad (\text{F.1})$$

donde la circulación se realiza sobre una curva que rodea el origen, en donde se supone que se localiza el vórtice. En nuestro caso, la fase de los NBBs (3.18) para los haces cónicos con $\delta < 0$ tiene la forma

$$\theta = \psi(\rho) + l\phi - \zeta. \quad (\text{F.2})$$

Calculando el gradiente y el elemento del camino en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, ζ) ,

$$\begin{aligned} \nabla\theta &= \frac{d\theta}{d\rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d\theta}{d\phi} \vec{u}_\phi + \frac{d\theta}{d\zeta} \vec{u}_\zeta \\ &= \frac{d\psi}{d\rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} l \vec{u}_\phi - \vec{u}_\zeta \\ d\vec{s} &= \rho d\phi \vec{u}_\phi, \end{aligned}$$

y haciendo el recorrido en un camino circular en efecto tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} l d\phi = l, \quad (\text{F.3})$$

es decir, la carga topológica coincide con el valor del parámetro entero l .

F.2. Comportamiento de la amplitud en el origen cuando existe un vórtice

En el núcleo de un vórtice ($\rho \rightarrow 0$), la amplitud real debe comportarse como $\tilde{a}(\rho) \sim \rho^{|l|}$. Para demostrar esto, en primer lugar hay que entender que en el origen $\tilde{a}(\rho) = 0$, puesto que de lo contrario la amplitud A estaría multivaluada (en cualquier punto cercano la fase toma todos los valores posibles entre 0 y 2π). Por ello, cerca del origen los términos no lineales en la ecuación (3.19) son despreciables y se puede escribir

$$\frac{d^2\tilde{a}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{a}}{d\rho} + \tilde{a} - \frac{l^2}{\rho^2} \tilde{a} = 0, \quad (\text{F.4})$$

con lo que, si suponemos un comportamiento de la forma $\tilde{a} \propto \rho^t$, con $t > 0$, obtenemos

$$[t(t-1) + t - l^2] + \rho^2 = 0, \quad (\text{F.5})$$

que, en el origen, conduce en efecto a $t = |l|$, como queríamos demostrar.

Apéndice G

Análisis linealizado de la estabilidad

En este apéndice se resume el procedimiento para realizar un análisis de estabilidad de un estado estacionario no lineal bajo pequeñas perturbaciones, llamado por ello análisis linealizado, tal como fue desarrollado en los noventa (Soto-Crespo, Wright, y Akhmediev 1992; Firth y Skryabin 1997; Torres et al. 1998).

G.1. Ecuación para la perturbación

Empezamos proponiendo una NSE más compacta todavía que (3.16), como

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \zeta} = i\Delta_{\perp}\tilde{A} + iF(|\tilde{A}|^2)\tilde{A}, \quad (\text{G.1})$$

en donde hemos agrupado los términos no lineales en la función $F(I) = \alpha I + iI^{M-1}$, quedándonos en este caso sólo con el Kerr cúbico. El laplaciano de nuevo será $\Delta_{\perp} = (\partial^2/\partial\rho^2) + (1/\rho)(\partial/\partial\rho) + (1/\rho^2)(\partial^2/\partial\phi^2)$, que ponemos como $\Delta_{\perp} = \Delta_{\rho} + (1/\rho^2)(\partial^2/\partial\phi^2)$. El estado estacionario es $\tilde{A}_l = a(\rho)e^{i\psi(\rho)}e^{-i\zeta}e^{il\phi}$, con o sin vórtice, es decir, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y el estado perturbado es

$$\tilde{A} = \tilde{A}_l + \epsilon p(\rho, \phi, \zeta), \quad (\text{G.2})$$

siendo $\epsilon p(\rho, \phi, \zeta)$ una pequeña perturbación genérica muy pequeña ($\epsilon \rightarrow 0$). La ecuación (G.1) con (G.2) queda

$$\frac{\partial \tilde{A}_l}{\partial \zeta} + \epsilon \frac{\partial p}{\partial \zeta} = i\Delta_{\perp}\tilde{A}_l + i\epsilon\Delta_{\perp}p + iF(|\tilde{A}_l + \epsilon p|^2)(\tilde{A}_l + \epsilon p), \quad (\text{G.3})$$

linealizando, $|\tilde{A}_l + \epsilon p|^2 \simeq |\tilde{A}_l|^2 + \epsilon p^* \tilde{A}_l + \epsilon p \tilde{A}_l^*$,

$$\begin{aligned} F(|\tilde{A}_l + \epsilon p|^2) &\simeq F[|\tilde{A}_l|^2 + \epsilon(p^* \tilde{A}_l + p \tilde{A}_l^*)] \simeq F(|\tilde{A}_l|^2) + \frac{dF}{d|\tilde{A}_l|^2} \epsilon(p^* \tilde{A}_l + p \tilde{A}_l^*) \\ &\equiv F_l + \epsilon F'_l(p^* \tilde{A}_l + p \tilde{A}_l^*), \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

donde

$$\begin{aligned} F_l &= \alpha |\tilde{A}_l|^2 + i |\tilde{A}_l|^2 + i |\tilde{A}_l|^{2(M-1)} = \alpha a^2 + i a^{2(M-1)} \\ F'_l &= \alpha + i(M-1) |\tilde{A}_l|^{2(M-2)} = \alpha + i(M-1) a^{2(M-2)}. \end{aligned}$$

Introduciendo este desarrollo en G.3, quedándonos con los términos lineales en ϵ y teniendo en cuenta que $\tilde{A}_l$ satisface la NSE (G.1), obtenemos una ecuación de evolución de una pequeña perturbación arbitraria p ,

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = i\Delta_{\perp}p + i(F_l + F'_l|\tilde{A}_l|^2)p + iF'_l\tilde{A}_l^2p^*, \quad (\text{G.5})$$

con $|\tilde{A}_l|^2 = a^2$ y $\tilde{A}_l^2 = a^2 e^{2i\psi} e^{-2i\zeta} e^{2il\phi}$.

G.2. Problema de autovalores

Siempre se puede desarrollar la perturbación en armónicos azimutales de la forma (Desyatnikov, Kivshar, y Torner 2005)

$$p(\rho, \phi, \zeta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_m(\rho, \zeta) e^{im\phi}. \quad (\text{G.6})$$

siendo $p_m(\rho, \zeta)$ un modo de perturbación que tiene periodo azimutal $2\pi/m$ si $m \neq 0$ y un modo radial si $m = 0$. La ecuación (G.5) queda entonces

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{\partial p_m}{\partial \zeta} e^{im\phi} = & i \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(\Delta_{\rho} p_m - \frac{m^2}{\rho^2} p_m \right) e^{im\phi} \\ & + i(F_s + F'_s a^2) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p_m e^{im\phi} \\ & + iF'_s a^2 e^{2i\psi} e^{-2i\zeta} e^{2il\phi} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p_m^* e^{-im\phi}. \end{aligned}$$

Separando los términos con diferente dependencia azimutal $e^{im\phi}$ se obtiene un conjunto de infinitas ecuaciones. En cada una de ellas sólo dos modos perturbativos quedan acoplados, p_m y p_{2l-m} , apareciendo en la misma ecuación. Esto equivale a decir, cambiando m por $l+m$, que quedan acoplados los términos en $l+m$ y $l-m$, siendo las ecuaciones para estos modos de perturbación

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{l+m}}{\partial \zeta} &= i\Delta_{\rho} p_{l+m} - \frac{(l+m)^2}{\rho^2} p_{l+m} + i(F_l + F'_l a^2) p_{l+m} + iF'_l a^2 e^{2i\psi} e^{-2i\zeta} p_{l-m}^* \\ \frac{\partial p_{l-m}}{\partial \zeta} &= i\Delta_{\rho} p_{l-m} - \frac{(l-m)^2}{\rho^2} p_{l-m} + i(F_l + F'_l a^2) p_{l-m} + iF'_l a^2 e^{2i\psi} e^{-2i\zeta} p_{l+m}^*. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

Debido a la simetría de las ecuaciones, sólo es necesario considerar los valores no negativos $m = 0, +1, +2, \dots$. Probamos soluciones que puedan crecer exponencialmente, dando lugar a inestabilidad

$$\begin{aligned} p_{l+m} &= u_m(\rho) e^{i\beta+\zeta} \\ p_{l-m} &= v_m^*(\rho) e^{i\beta-\zeta}, \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

con $\beta_{\pm}$ complejo, es decir, si $\text{Im}(\beta_{\pm}) < 0$ tendríamos una exponencial creciente, quedando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\beta_+ u_m &= \Delta_{\rho} u_m - \frac{(l+m)^2}{\rho^2} u_m + (F_l + F_l' a^2) u_m + F_l' a^2 e^{2i\psi} e^{-2i\zeta} v_m e^{-i\beta_+^* \zeta} e^{-i\beta_+ \zeta} \\ \beta_- v_m^* &= \Delta_{\rho} v_m^* - \frac{(l-m)^2}{\rho^2} v_m^* + (F_l + F_l' a^2) v_m^* + F_l' a^2 e^{2i\psi} e^{-2i\zeta} u_m^* e^{-i\beta_+^* \zeta} e^{-i\beta_- \zeta},\end{aligned}\tag{G.9}$$

que para ser satisfecho necesita que $-2 - \beta_-^* - \beta_+ = 0$, lo que se consigue suponiendo que $\beta_+ = -1 + \kappa_m$ y que $\beta_- = -1 - \kappa_m^*$. Los modos de perturbación deben ser entonces de la forma

$$\begin{aligned}p_{l+m} &= u_m(\rho) e^{-i\zeta} e^{i\kappa_m \zeta} \\ p_{l-m} &= v_m^*(\rho) e^{-i\zeta} e^{-i\kappa_m^* \zeta},\end{aligned}\tag{G.10}$$

y las ecuaciones para su forma radial $[u_m(\rho), v_m^*(\rho)]$ son

$$\begin{aligned}\kappa_m u_m &= \Delta_{\rho} u_m - \frac{(l+m)^2}{\rho^2} u_m + u_m + (F_l + F_l' a^2) u_m + F_l' a^2 e^{2i\psi} v_m \\ \kappa_m v_m &= -\Delta_{\rho} v_m + \frac{(l-m)^2}{\rho^2} v_m - v_m - (F_l^* + F_l'^* a^2) v_m - F_l'^* a^2 e^{-2i\psi} u_m.\end{aligned}\tag{G.11}$$

Como

$$\begin{aligned}F_l + F_l' a^2 &= 2\alpha a^2 + iMa^{2(M-1)} \\ F_l' a^2 e^{2i\psi} &= [\alpha a^2 + i(M-1)a^{2(M-1)}] e^{2i\psi},\end{aligned}\tag{G.12}$$

se obtiene finalmente el problema de autovalores

$$\begin{aligned}\kappa_m u_m &= \Delta_{\rho} u_m - \frac{(l+m)^2}{\rho^2} u_m + u_m + (2\alpha a^2 + iMa^{2(M-1)}) u_m + [\alpha a^2 + i(M-1)a^{2(M-1)}] e^{2i\psi} v_m, \\ \kappa_m v_m &= -\Delta_{\rho} v_m + \frac{(l-m)^2}{\rho^2} v_m - v_m - (2\alpha a^2 - iMa^{2(M-1)}) v_m - [\alpha a^2 - i(M-1)a^{2(M-1)}] e^{-2i\psi} u_m,\end{aligned}$$

que se puede poner en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} H_+ & f \\ -f^* & -H_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \kappa_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix},\tag{G.13}$$

sin más que definir los operadores

$$\begin{aligned}H_{\pm} &= \Delta_{\rho} - \frac{(l \pm m)^2}{\rho^2} + 1 + (2\alpha a^2 + iMa^{2(M-1)}) \\ f &= [\alpha a^2 + i(M-1)a^{2(M-1)}] e^{2i\psi}.\end{aligned}\tag{G.14}$$

Dado un estado estacionario no lineal, como un NBB con carga topológica l , este problema de autovalores κ_m y automodos (u_m, v_m) debe resolverse, en principio, para todo valor de m , para concluir la existencia o no de algún autovalor con parte imaginaria negativa, que da lugar a un crecimiento exponencial del automodo correspondiente, y por tanto,

a inestabilidad. Si tal autovalor existe con $m = 0$, el estado estacionario es inestable radialmente. Si existe también con $m \neq 0$, el estado estacionario es inestable azimutalmente.

En el capítulo (4) se ha realizado el análisis de estabilidad en el caso de NBB sin vórtice ($l = 0$), en cuyo caso es conocido que la inestabilidad predominante, si existe, es radial ($m = 0$). En este caso, las ecuaciones anteriores dan

$$\begin{pmatrix} H_+ & f \\ -f^* & -H_-^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (\text{G.15})$$

$$\begin{aligned} H_{\pm} &= \Delta_{\rho} + 1 + (2\alpha a^2 + iMa^{2(M-1)}) \\ f &= [\alpha a^2 + i(M-1)a^{2(M-1)}]e^{2i\psi}, \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

donde se han omitido los subíndices $m = 0$ por brevedad.

Como se comentó en la sección 4.4, a este resultado se puede llegar alternativamente, de un modo más conciso, introduciendo el Ansatz

$$\tilde{A} = \tilde{A}_l + \epsilon[u(\rho)e^{i\kappa\zeta} + v^*e^{i\kappa^*z}]e^{-i\zeta} \quad (\text{G.17})$$

en la NSE (G.1) y linealizando en ϵ .

El problema (G.15) con H y f dados por (G.16) es el que ha sido resuelto numéricamente en la sección 4.4, dando lugar a los resultados de la figura 4.7. Para ello se ha introducido una discretización en ρ con N puntos y cierto paso h , lo que lo convierte en un problema usual matricial de autovalores.

Índice de figuras

1.1. Difracción	13
1.2. Autofocalización	17
1.3. Automodulación de la fase y autofocalización	18
1.4. Absorción multifotón	20
2.1. Función de Airy	25
2.2. Trayectoria parabólica	26
2.3. Haces de Airy no lineales (NABs) con MPA $M = 5$ y no linealidad Kerr $\alpha = 1$	28
2.4. Haz de Airy no lineal (NAB)	28
2.5. Comportamiento asintótico de los NABs y LNAB($M = 5$ y $\alpha = 1$).	30
2.6. Contraste y pérdidas no lineales.	31
2.7. Amplitudes de las componentes de Hänkel de los NABs.	32
2.8. Propagación del haz de Airy ideal.	35
2.9. Pérdidas e intensidad pico en la propagación del haz de Airy ideal.	36
2.10. Conservación de la componente de Hänkel entrante.	37
2.11. Propagación de un haz de Airy apodizado.	39
2.12. Introducción abrupta y suave en el medio.	40
2.13. Propagación del haz de Airy real en introducción abrupta.	40
2.14. Introducción abrupta, pérdidas no lineales de potencia e intensidad pico.	42
2.15. Propagación del haz de Airy real en introducción suave.	43
2.16. Pérdidas e intensidad pico en introducción suave.	45
2.17. Alcance del LNAB en incidencia suave.	46
2.18. Restauración.	47
2.19. Recuperación de la intensidad pico.	49
3.1. Ejemplo de perfil de funciones de Bessel	52
3.2. Axicón	53
3.3. Frentes de onda helicoidales	55
3.4. Valores de $b_{0,\max}$	57
3.5. Perfiles de intensidad de NBBs	58
3.6. Corrientes de intensidad de BBs y NBBs	60
3.7. Componentes de Hänkel	62
3.8. Propagación de BB	64
3.9. Problema de selección	66

4.1. Tipos de incidencia en el medio.	70
4.2. Regímenes de propagación detrás del axicón en 3D	71
4.3. Regiones de existencia de NBBs	73
4.4. Propagación de BBs reales.	75
4.5. Alcance del NBB a partir de un haz de Bessel-Gauss.	77
4.6. Fórmula del atractor	79
4.7. Modos inestables	80
4.8. Mapa de fases ideal	82
4.9. Mapa de fases real	83
A.1. Evolución del Airy apodizado	93

Índice de materias

- ángulo cónico, 53, 54, 72
- absorción
 - lineal, coeficiente de, 10
- absorción multifotón, 19, 26, 34, 73, 74
- Airy
 - haces de, 11, 23, 24, 26, 33, 51, 55, 66
 - haz no lineal estacionario, 28
 - haz no lineal límite, 31
 - observación experimental, 24
 - trayectoria parabólica, 26, 27
- apodización, 24, 74, 76
- atractor, 45, 64, 72, 74, 78, 79
- autofocalización, 16, 28, 57, 58
- axicón, 52, 54, 74, 76
- balas de luz, 18
- Bessel
 - haces de, 11, 33, 38, 51–53, 55
 - haces no lineales de, 55
 - zona de, 54, 69, 70, 74
- Bessel-Gauss
 - haces de, 76
- campo
 - eléctrico, 8
 - magnético, 8
- canales de plasma, 18, 25, 34
- carga topológica, 51, 54, 111
- coeficiente de absorción multifotón, 19
- condiciones de contorno
 - de haces de Bessel, 56
- constante dieléctrica, 10
- contraste de oscilaciones, 29, 58, 63
- corriente
 - de energía, 59
- desfase
 - cónico, 56, 72
- dieléctrico, 8
- dispersión cromática, 19
- distancia característica
 - de absorción multifotón, 20
 - de autofocalización, 16
 - de difracción, 12
 - de dispersión, 19
- ecuación de continuidad, 28, 59, 61, 62, 72
- ecuación de ondas, 9
- efecto Kerr, 14–16, 34, 73
- estabilidad, 38, 80
- fase lineal
 - de haces de Airy, 27
- fase no lineal
 - de haces de Airy, 27
 - de haces de Bessel, 56
- Fast Fourier Transform Beam Propagation Method, 34, 63, 99
- femtosegundo, 19
- filamentación, 18
- Fresnel
 - integral de, 12
- Gauss
 - haces de, 11
- generación de armónicos, 14
- Hänkel
 - colas de, 33
 - componentes de, 32, 61
 - funciones de, 31, 55, 62, 79
- Helmholtz, ecuación de, 10
- inducción magnética, 8

- intensidad, 15
 - pico, 16
- ionización, 19
- irradiancia, 15
- Keldysh, coeficiente de, 19
- Kirchhoff
 - integral de, 11
- Klein-Gordon
 - ecuación de, 25
- laplaciano transversal, 11, 56
- luz
 - autoatrapada, 18
 - autoguiada, 18
- materiales isótropos, 14
- Maxwell, ecuaciones de, 8
- momento angular, 54, 59, 61
- Newton
 - analogía de, 29
- onda plana, 10
- pérdidas no lineales, 29, 59, 65, 78
- paraxial
 - aproximación, 8, 11, 12
 - ecuación, 11
- permeabilidad, 8
- permitividad, 8
- polarización
 - lineal, 9
 - no lineal, 14
- potencia crítica, 18
- problema de selección, 37, 65
- Rayleigh, rango de, 12
- refracción
 - índice de, 10
 - no lineal, índice de, 15
- reservorio, 24, 59
- saturación, 18
- Schrödinger
 - ecuación lineal de, 11, 23, 25
 - ecuación no lineal de, 8, 15, 26, 56, 72
- Self-phase modulation, 16, 28, 57, 58
- solitón, 17, 34
- Split-Step-Fourier Method, 34, 63, 99, 101
- susceptibilidad, 9, 10
- Townes, haz de, 17, 18
- vórtice, 33, 51, 54, 59, 63
- vector
 - de onda, 10
 - de Poynting, 16
 - desplazamiento, 8

Referencias

- Abdollahpour, D., S. Suntsov, D. G. Papazoglou, y S. Tzortzakis. 2010. “Spatiotemporal Airy Light Bullets in the Linear and Nonlinear Regimes.” *Physical Review Letters* 105:253901.
- Ablowitz, M. J., B. Prinari, y A. D. Trubatch. 2004. *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger systems, London Math Soc Lecture Notes Series*. Volume 302. New York (USA): Cambridge Univ. Press.
- Agrawal, G. P. 2001. *Nonlinear fiber optics*. London (UK): Academic Press.
- Airy, G. B. 1838. “On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic.” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 6:379–402.
- . 1849. “Supplement to a paper “On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic”.” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8:595–599.
- Alexandrescu, A., y V. M. Pérez-García. 2006. “Matter-wave solitons supported by dissipation.” *Physical Review A* 73:053610.
- Allayarov, I. M., y E. N. Tsoy. 2014. “Dynamics of Airy beams in nonlinear media.” *Physical Review A* 90:023852.
- Allen, L., M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, y J. P. Woerdman. 1992. “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes.” *Physical Review A* 45:8185–8189.
- Allen, L., M. Padgett, y M. Babiker. 1999. “The orbital angular momentum of light.” *Progress in Optics* 39:291–372.
- Arlt, J., V. Garcés-Chávez, W. Sibbett, y K. Dholakia. 2001. “Optical micromanipulation using a Bessel light beam.” *Optics Communications* 197:239–245.
- Askar’yan, G. A. 1962. “Effects of the gradient of strong electromagnetic beam on electrons and atoms.” *Soviet Physics - JETP* 6:1088–1090.
- Bandres, M. A. 2008. “Accelerating parabolic beams.” *Optics Letters* 33:1678–1680.
- Baungartl, J., M. Mazilu, y K. Dholakia. 2008. “Optically mediated particle clearing using Airy Wavepackets.” *Nature Photonics* 2:675–678.
- Beijersbergen, M. W., R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen, y J. P. Woerdman. 1994. “Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate.” *Optics Communications* 112:321–327.
- Berry, M. V., y N. L. Balazs. 1979. “Non spreading wave packets.” *American Journal of Physics* 47:264–267.

- Bjorkholm, J. E., y A. Ashkin. 1979. "Self-focusing and Self-trapping of light in sodium vapor." *Physical Review Letters* 32:129–132.
- Borghi, R., M. Santarsiero, y M. A. Porras. 2001. "Nonparaxial Bessel-Gauss beams." *Journal of the Optical Society of America A* 18 (7): 1618–1626.
- Born, M., y E. Wolf. 1980. *Principles of Optics*. Oxford (UK): Pergamon Press.
- Boyd, R. W. 2008. *Nonlinear optics*. London (UK): Academic Press.
- Braun, A., G. Korn, X. Liu, D. Du, J. Squier, y G. Mourouet. 1995. "Self-channeling of high-peak-power femtosecond laser pulses in air." *Optics Letters* 20:73–75.
- Broky, J., G. A. Siviloglou, A. Dogariu, y D. N. Christodoulides. 2008. "Self-healing properties of optical Airy beams." *Optics Express* 16:12880–12891.
- Cabrera, J. M., F. J. López, y F. Agulló. 1992. *Óptica Electromagnética*. Volume I. Wilmington (USA): Addison-Wesley Iberoamericana.
- Chiao, R. Y., E. Garmire, y C. H. Townes. 1964. "Self-trapping of optical beams." *Physical Review Letters* 13(15):479–482.
- Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, y F. Laloë. 1977. *Quantum Mechanics*. Volume One. Paris (France): Wiley-Interscience.
- Couairon, A. 2003. "Dynamics of femtosecond filamentation from saturation of self-focusing laser pulses." *Physical Review A* 68:015801.
- Couairon, A., A. Lotti, P. Panagiotopoulos, D. Abdollahpour, D. Faccio, D. G. Papazoglou, S. Tzortzakis, F. Courvoisier, y J. M. Dudley. 2013. "Ultrashort laser pulse filamentation with Airy and Bessel beams." *Proceedings of SPIE* 8770:87701E.
- Desyatnikov, A., Y. Kivshar, y L. Torner. 2005. "Optical vortices and vortex solitons." *Progress in Optics* 47:291–391.
- Durnin, J. 1987. "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory." *Journal of the Optical Society of America A* 4:651–654.
- Durnin, J., J. J. Miceli, y J. H. Eberly. 1987. "Diffraction-free beams." *Physical Review Letters* 58:1499–1501.
- Fattal, Y., A. Rudnick, y D. M. Marom. 2011. "Soliton shedding from Airy pulses in Kerr media." *Optics Express* 19:17298–17307.
- Fibich, G., y G. Papanicolaou. 1999. "Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear Schrödinger equation in critical dimension." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 60:183.
- Firth, W. J., y D. V. Skryabin. 1997. "Optical solitons carrying orbital angular momentum." *Physical Review Letters* 79:2450–2453.
- Gadonas, R., V. Jarutis, R. Paskauskas, V. Smilgevicius, A. Stabinis, y V. Vaicaitis. 2001. "Self-action of Bessel beam in nonlinear medium." *Optics Communications* 196:309–316.
- Gaizauskas, E., A. Dubietis, V. Kudriasov, V. Sirutkaitis, A. Couairon, D. Faccio, y P. Di Trapani. 2008. *Self-focusing: Past and Present Fundamentals and Prospects. Topics in Applied Physics, Chap. 20*. Volume 114. New York (USA): Springer.

- Gaizauskas, E., E. Vanagas, V. Jarutis, S. Juodkazis, V. Mizeikis, y H. Misawa. 2006. "Discrete damage traces from filamentation of Gauss-Bessel pulses." *Optics Letters* 31:80–82.
- Giovannini, D., J. Romero, V. Potocek, G. Ferenczi, F. Speirits, S. M. Barnett, D. Faccio, y M. J. Padgett. 2015. "Photons that travel in free space slower than the speed of light." *Science* 347:857–860.
- Göppert-Mayer, M. 1931. "Elementary actions with two quantum leaps." *Annalen der Physik* 9:273–295.
- Greenberger, D. M. 1980. "Comment on "Non spreading wave packets". " *American Journal of Physics* 48:256.
- Griffiths, D. J. 2008. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey (USA): Prentice Hall.
- Heckenberg, N. R., R. McDuff, C. P. Smith, H. Rubinsztein-Dunlop, y M. J. Wegener. 1992. "Laser beams with phase singularities." *Optical and Quantum Electronics* 24:951–962.
- Hercher, M. 1964. "Laser-induced damage in transparent media." *Journal of the Optical Society of America* 54:563.
- Jacobson, N. 1962. *Lie Algebras*. New York (USA): Wiley-Interscience.
- Johannisson, P., D. Anderson, M. Lisak, y M. Marklund. 2003. "Nonlinear bessel beams." *Optics Communications* 222 (1): 107–115.
- Jukna, V., C. Milián, C. Xie, T. Itina, J. Dudley, F. Courvoisier, y A. Couairon. 2014. "Filamentation with nonlinear Bessel vortices." *Optics Express* 22:25410–25425.
- Kaiser, W., y C. G. B. Garrett. 1961. "Two-photon excitation in $\text{CaF}_2:\text{Eu}^{2+}$." *Physical Review Letters* 7:229–231.
- Kaminer, I., R. Bekenstein, J. Nemirovsky, y M. Segev. 2012. "Nondiffracting Accelerating Wave Packets of Maxwell's Equations." *Physical Review Letters* 108:163901.
- Kaminer, I., M. Segev, y D. N. Christodoulides. 2011. "Self-Accelerating Self-Trapped Optical Beams." *Physical Review Letters* 106:213903.
- Keldysh, L. V. 1965. "Ionization in the field of a strong electromagnetic wave." *Soviet Physics - JETP* 20 (5): 1307–1314.
- Kelley, P. L. 1965. "Self-focusing of optical beams." *Physical Review Letters* 15:1005.
- Kolesik, M., y J. V. Moloney. 2004. "Self-healing femtosecond light filaments." *Optics Letters* 29:590–592.
- Kolesik, M., E. M. Wright, A. Becker, y J. V. Moloney. 2002. "Simulation of third-harmonic and supercontinuum generation for femtosecond pulses in air." *Applied Physics Letters* 88:153901.
- Kudriasov, V., E. Gaizauskas, y V. Sirutkaitis. 2005. "Beam transformation and permanent modification in fused silica induced by femtosecond filaments." *Journal of the Optical Society of America B* 22:2619–2627.
- Lallemant, P., y N. Bloembergen. 1965. "Self-focusing of laser beams and stimulated Raman gain in liquids." *Physical Review Letters* 15:1010.

- Landau, L. D., y E. M. Lifshitz. 1958. *Quantum Mechanics*. Oxford (UK): Pergamon Press.
- Lekner, J. 2009. “Airy wavepacket solutions of the Schrödinger equation.” *European Journal of Physics* 30:43–46.
- LeMesurier, B. J. 2000. “Dissipation at singularities of the nonlinear Schrödinger equation through limits of regularisations.” *Physica D* 138:334–343.
- Leontovich, M. S., y V. A. Fock. 1946. “Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the earth’s surface by the method of the parabolic equation.” *Journal of Physics-USSR* 10:13–24.
- Litvak, A. G., y V. I. Talanov. 1967. “A parabolic equation for calculating the fields in dispersive nonlinear media.” *Radiophysics and Quantum Electronics* 10:296–302.
- Liu, W., S. L. Chin, O. Kosareva, I. S. Golutsov, y V. P. Kandinov. 2003. “Multiple refocusing of a femtosecond laser pulse in a dispersive liquid (methanol).” *Optics Communications* 225:193.
- Liu, W., J. F. Gravel, F. Théberge, A. Becker, y S. L. Chin. 2005. “Background reservoir: its crucial role for long-distance propagation of femtosecond laser pulses in air.” *Applied Physics B* 80:857–860.
- Lotti, A., D. Faccio, A. Couairon, D. G. Papazoglou, P. Panagiotopoulos, D. Abdollahpour, y S. Tzortzakis. 2011. “Stationary nonlinear Airy beams.” *Physical Review A* 84:021807(R).
- Malomed, B. A., L. C. Crasovan, y D. Mihalache. 2002. “Stability of vortex solitons in the cubic-quintic model.” *Physica D* 161:187–201.
- Marburger, J. H. 1975. “Self-focusing: Theory.” *Progress in Quantum Electronics* 4:35–110.
- Masalov, A. V. 1997. “Transfer of a high angular momentum from a photon to an atom.” *Laser Physics* 7:751–754.
- Mlejnek, M., M. Kolesik, J. V. Moloney, y E. M. Wright. 1999. “Optically turbulent femtosecond light guide in air.” *Physical Review Letters* 83:2938.
- Moll, K. D., A. L. Gaeta, y G. Fibich. 2003. “Self-similar optical wave collapse: observation of the Townes profile.” *Physical Review Letters* 90:203902.
- Moll, K. D., D. Homoelle, A. L. Gaeta, y R. W. Boyd. 2002. “Conical harmonic generation in isotropic materials.” *Physical Review Letters* 88:153901.
- Olver, W. J. 2010. *NIST Handbook of mathematical functions*. New York (USA): Cambridge University Press.
- Panagiotopoulos, P., D. Abdollahpour, A. Lotti, A. Couairon, D. Faccio, D. G. Papazoglou, y S. Tzortzakis. 2012. “Nonlinear propagation dynamics of finite-energy Airy beams.” *Physical Review A* 86:013842.
- Panagiotopoulos, P., D. G. Papazoglou, A. Couairon, y S. Tzortzakis. 2013. “Sharply autofocused ring-Airy beams transforming into non-linear intense light bullets.” *Nature Communications* 4:2622.

- Phys.org. 2016. “Super-powerful light beams and the butterfly effect.” <http://phys.org/news/2016-03-super-powerful-butterfly-effect.html>.
- Polesana, P., A. Couairon, D. Faccio, A. Parola, M. A. Porras, A. Dubietis, A. Piskarskas, y P. Di Trapani. 2007. “Observation of conical waves in focusing, dispersive, and dissipative Kerr media.” *Physical Review Letters* 99:223902.
- Polesana, P., A. Dubietis, M. A. Porras, E. Kucinskas, D. Faccio, A. Couairon, y P. Di Trapani. 2006. “Near-field dynamics of ultrashort pulsed Bessel beams in media with Kerr nonlinearity.” *Physical Review E* 73:056612.
- Polesana, P., P. Faccio, D. Di Trapani, A. Dubietis, A. Piskarskas, A. Couairon, y M. A. Porras. 2005. “High localization, focal depth and contrast by means of nonlinear Bessel Beams.” *Optics Express* 13:6160–6167.
- Polesana, P., M. Franco, A. Couairon, D. Faccio, y P. Di Trapani. 2008. “Filamentation in Kerr media from pulsed Bessel beams.” *Physical Review A* 77:043814.
- Polyakov, S., F. Yoshino, y G. Stegeman. 2001. “Interplay between self-focusing and high-order multiphoton absorption.” *Journal of the Optical Society of America B* 18:1891–1895.
- Polynkin, P., M. Kolesik, J. V. Moloney, G. A. Siviloglou, y D. N. Christodoulides. 2009. “Curved Plasma Channel Generation Using Ultraintense Airy Beams.” *Science* 324:229–232.
- Porras, M. A., M. Carvalho, H. Leblond, y B. A. Malomed. 2016. “Stable nonlinear vortices in self-focusing Kerr media with nonlinear absorption.” *NoLineal Sevilla 2016. Book of abstracts. Posters.*, vol. 96.
- Porras, M. A., A. Parola, D. Faccio, A. Couairon, y P. Di Trapani. 2007. “Light-filament dynamics and the spatiotemporal instability of the Townes profile.” *Physical Review A* 76:011803(R).
- Porras, M. A., A. Parola, D. Faccio, A. Dubietis, y P. Di Trapani. 2004. “Nonlinear unbalanced Bessel beams: Stationary conical waves supported by nonlinear losses.” *Physical Review Letters* 93:153902.
- Porras, M. A., y C. Ruiz-Jiménez. 2014. “Nondiffracting and non-atenuating vortex light beams in media with nonlinear absorption of orbital angular momentum.” *Journal of the Optical Society of America B* 31:2657–2664.
- Porras, M. A., C. Ruiz-Jiménez, y J. C. Losada. 2015. “Underlying conservation and stability laws in nonlinear propagation of axicon-generated Bessel beams.” *Physical Review A* 92:063826.
- Pyragaite, V., K. Regelskis, V. Smilgevicius, y A. Stabinis. 2005. “Self-action of Bessel light beams in medium with large nonlinearity.” *Optics Communications* 257:139–145.
- Roskey, D. E., M. Kolesik, J. V. Moloney, y E. M. Wright. 2007. “Self-action and regularized self-guiding of pulsed Bessel-like beams in air.” *Optics Express* 15:9893–9907.
- Rostami, S. 2016. *Thesis: Polarization characterization of nonlinear laser propagation*. Albuquerque (USA): The University of New Mexico.

- Ruiz-Jiménez, C., K. Z. Nóbrega, y M. A. Porras. 2015. "On the dynamics of Airy beams in nonlinear media with nonlinear losses." *Optics Express* 23:8918–8928.
- Salo, J., J. Fagerholm, A. Friberg, y M. M. Salomaa. 2000. "Unified description of nondiffracting X and Y waves." *Physical Review E* 62:4261–4275.
- Schiff, L. I. 1968. *Quantum Mechanics*. New York (USA): McGraw-Hill.
- Segev, M., B. Crosignani, A. Yariv, y B. Fischer. 1991. "Spatial solitons in photorefractive media." *Physical Review Letters* 68:923.
- Sheik-Bahae, M., A. A. Said, T. H. Wei, D. J. Hagan, y E. W. Van Stryland. 1990. "Sensitive Measurement of Optical Nonlinearities Using a Single Beam." *IEEE Journal of Quantum Electronics* 26:760–769.
- Shen, Y. R. 1984. *The principles of nonlinear optics*. New York (USA): Wiley-Interscience.
- Silberberg, Y. 1990a. "Collapse of optical pulses." *Optics Letters* 15(22):1282–1284.
- . 1990b. "Solitons and two-photon absorption." *Optics Letters* 15:1005–1007.
- SINC. 2016. "Desvelan secretos de los haces de luz con el efecto mariposa." *FECYT. Servicio de Información y Noticias Científicas* <http://www.agenciasinc.es/Noticias/Desvelan-secretos-de-los-haces-de-luz-con-el-efecto-mariposa>.
- Siviloglou, G. A., J. Broky, A. Dogariu, y D. N. Christodoulides. 2007. "Observation of accelerating Airy beams." *Physical Review Letters* 99:213901.
- Siviloglou, G. A., y D. N. Christodoulides. 2007. "Accelerating finite energy Airy beams." *Optics Letters* 32:979–981.
- Sokolovskii, G. S., V. V. Dudelev, S. N. Losev, K. K. Soboleva, A. G. Deryagin, V. I. Kuchinskii, W. Sibbett, y E. U. Rafailov. 2014. "Optical trapping with Bessel beams generated from semiconductor lasers." *Journal of Physics: Conference Series* 572:012039.
- Soto-Crespo, J. M., E. M. Wright, y N. N. Akhmediev. 1992. "Recurrence and azimuthal-symmetry breaking of a cylindrical Gaussian beam in a saturable self-focusing medium." *Physical Review A* 45:3168–3175.
- Spiegel, M. R. 1970. *Teoría y Problemas de Análisis Vectorial*. Mexico D.F. (Mexico): McGraw-Hill.
- Sulem, C., y P. Sulem. 1999. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*. New York (USA): Springer.
- Tabosa, J. W. R., y D. V. Petrov. 1999. "Optical pumping of orbital angular momentum of light in cold cesium atoms." *Physical Review E* 83:4967–4970.
- Talanov, V. I. 1964. "On self-focusing of electromagnetic waves in nonlinear media." *Radiophysica* 7:254–255.
- Torres, J. P., J. M. Soto-Crespo, L. Torner, y D. V. Petrov. 1998. "Solitary-wave vortices in quadratic nonlinear media." *Journal of the Optical Society of America B* 15:625–627.

- Trillo, S., y W. Torruellas. 2001. *Spatial Solitons*. New York (USA): Springer Series in Optical Sciences, Springer.
- Tzortzakis, S., M. A. Franco, Y. B. André, A. Chiron, B. Lamouroux, B. S. Prade, y A. Mysyrowicz. 1999. "Formation of a conducting channel in air by self-guided femtosecond laser pulses." *Physical Review E* 60:R3505.
- Tzortzakis, S., L. Sudrie, M. Franco, B. Prade, A. Mysyrowicz, A. Couairon, y L. Bergé. 2001. "Self-guided propagation of ultrashort IR laser pulses in fused silica." *Physical Review Letters* 87:213902.
- Volke-Sepulveda, K., V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, y K. Dholakia. 2002. "Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam." *Journal of Optics B* 4:S82–S89.
- Voloch-Bloch, N., Y. Lereah, Y. Lilach, A. Gover, y A. Arie. 2007. "Generation of electron Airy beams." *Nature* 494:331–335.
- Wangsness, R. K. 1989. *Campos electromagnéticos*. México, D.F. (México): Limusa.
- Weideman, J. A. C., y B. M. Herbst. 1986. "Split-step method for the solution of the nonlinear Schrödinger equation." *SIAM Journal on Numerical Analysis* 23:458–507.
- Wise, F., y P. Di Trapani. 2002. "The hunt for light bullets-spatiotemporal solitons." *Optics and Photonics News, February* 2:28–32.
- Xie, C., V. Jukna, C. Milián, R. Giust, I. Ouadghiri-Idrissi, T. Itina, J. M. Dudley, A. Couairon, y F. Courvoisier. 2015. "Tubular filamentation for laser material processing." *Scientific Reports* 5:8914.
- Yakimenko, I., Y. A. Zaliznyak, y Y. Kivshar. 2005. "Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media." *Physical Review E* 71:065603(R).
- Zhang, P., Y. Hu, D. Cannan, A. Salandrino, T. Li, R. Morandotti, X. Zhang, y Z. Chen. 2012. "Generation of linear and nonlinear nonparaxial accelerating beams." *Optics Letters* 37:2820–2822.
- Zhang, Y., M. Belić, Z. Wu, H. Zheng, K. Lu, Y. Li, y Y. Zhang. 2014. "Interactions of Airy beams, nonlinear accelerating beams, and induced solitons in Kerr and saturable nonlinear media." *Optics Express* 22:7160–7171.